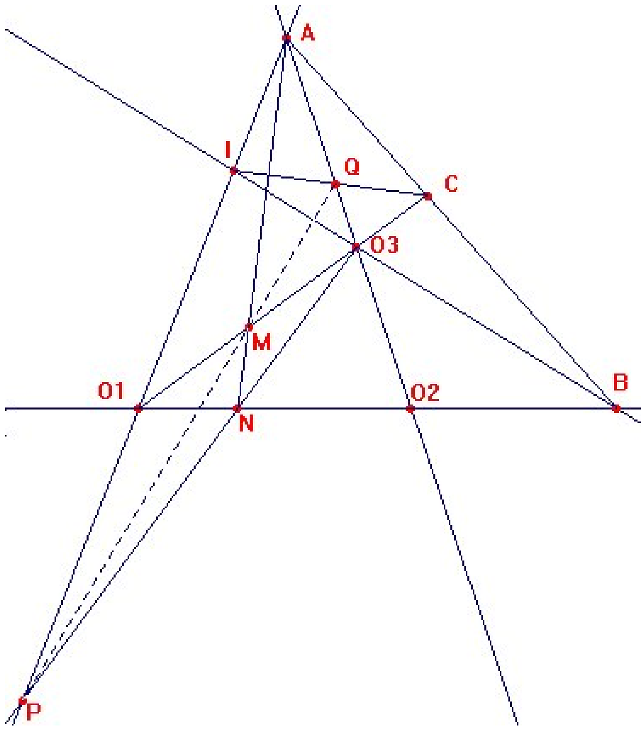
El examen de Geometría afín y proyectiva

del 19 de junio del 2006 resuelto por cortesía de

Alberto Castellón

1) Considérese un símplex $\{O_1, O_2, O_3, I\}$ de un plano proyectivo con A y B los puntos diagonales $A = \overline{O_2O_3} \cap \overline{O_1I}$, y $B = \overline{O_1O_2} \cap \overline{O_3I}$. Constrúyanse los puntos $C = \overline{AB} \cap \overline{O_1O_3}$ y $Q = \overline{O_2O_3} \cap \overline{CI}$. Trácese por A una recta r distinta de $\overline{O_1I}$ que corta a $\overline{O_1O_3}$ en M y a $\overline{O_1O_2}$ en N. Denótese por P al punto de intersección de $\overline{O_3N}$ con $\overline{O_1I}$.



i) Usando métodos analíticos en el sistema de coordenadas homogéneas $\{O_1, O_2, O_3; I\}$, demuéstrese que $\overline{MP}$ pasa siempre por Q, cualquiera que sea la recta r elegida (1.5 puntos).

Solución El el sistema de coordenadas homogéneas $\{O_1, O_2, O_3; I\}$, se tiene $O_1 = (1, 0, 0)$, $O_2 = (0, 1, 0)$, $O_3 = (0, 0, 1)$, $I = (1, 1, 1)$, $\overline{O_1O_2} \equiv x_2 = 0$, $\overline{O_1O_3} \equiv x_1 = 0$, $\overline{O_2O_3} \equiv x_0 = 0$, $\overline{O_1I} \equiv x_1 - x_2 = 0$ y $\overline{O_3I} \equiv x_0 - x_1 = 0$. Así, los puntos A y B tendrán por coordenadas $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 1, 0)$, de donde

$$\overline{AB} \equiv \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{de donde} \quad \overline{AB} \equiv -x_0 + x_1 + x_2 = 0,$$

y $C = (1, 0, -1)$. Por otro lado,

$$\overline{CI} \equiv \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{o} \quad \overline{CI} \equiv x_0 - 2x_1 + x_2 = 0.$$

Esto da $Q = (0, 1, 2)$. El punto M, situado sobre la recta $\overline{O_1O_3}$, tendrá unas coordenadas del tipo $M = (\lambda, 0, \mu)$, pero la condición $\overline{AM} = r \neq \overline{O_1I}$ implica $\mu \neq 0$, con lo que es lícito escribir $M = (\alpha, 0, 1)$ para algún escalar α. Es entonces

$$r = \overline{AM} \equiv \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{y} \quad r \equiv x_0 + \alpha x_1 - \alpha x_2 = 0.$$

De aquí $N = (\alpha, -1, 0)$. Por último, la recta $\overline{MN}$ tiene por ecuación

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ \alpha & 0 & 1 \\ -\alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

y se comprueba directamente que las coordenadas de Q satisfacen la ecuación $\overline{MP} \equiv -x_0 - 2\alpha x_1 + \alpha x_2 = 0$, cualquiera que sea el escalar α.

ii) Enúnciese la proposición dual del apartado anterior (0.5 puntos).

Solución Considérese un cuadrilátero $\{o_1, o_2, o_3, i\}$ de rectas diagonales $a = \overline{(o_2 \cap o_3)(o_i \cap i)}$ y $b = \overline{(o_1 \cap o_2)(o_3 \cap i)}$. Sean $c = \overline{(a \cap b)(o_1 \cap o_3)}$ y $q = \overline{(o_2 \cap o_3)(c \cap i)}$. Escójase en la recta a un punto arbitrario R distinto de $o_1 \cap i$, y trácense por él las rectas $m = \overline{R(o_1 \cap o_3)}$ y $n = \overline{R(o_1 \cap o_2)}$. Sea $p = \overline{(o_3 \cap n)(o_1 \cap i)}$. Entonces m, p y q concurren en un punto.

iii) Pruébese que i) no es sino una consecuencia directa del teorema de Desargues (1 punto).

Solución Los triángulos (C, I, O_1) y (A, O_3, N) se encuentran en la configuración de Desargues pues $B \in \overline{CA} \cap \overline{IO_3} \cap \overline{O_1N}$. De ahí que los puntos $Q = \overline{CI} \cap \overline{AO_3}$, $M = \overline{CO_1} \cap \overline{AN}$ y $P = \overline{IO_1} \cap \overline{O_3N}$ estén alineados.

iv) Si se consideran las perspectividades

$$\pi_A : \overline{O_1C} \to \overline{O_1B} \quad \text{y} \qquad \pi_{O_3} : \overline{O_1B} \to \overline{O_1A},$$

¿por qué es $\sigma = \pi_{O_3} \circ \pi_A$ otra perspectividad? Hállese el centro de σ calculando las imágenes de C y O_3 y utilícese el resultado para dar una demostración alternativa del apartado i) (0.5 puntos).

Solución La aplicación $\sigma : \overline{O_1C} \to \overline{O_1A}$ es una proyectividad al obtenerse por composición de perspectividades. Ahora bien, como el punto O_1 de intersección de las rectas dominio e imagen es doble, la proyectividad σ ha de ser una perspectividad (teorema I.4.3). Por otro lado,

$$\sigma(C) = (\pi_{O_3} \circ \pi_A)(C) = \pi_{O_3}(B) = I$$

$$\text{y} \quad \sigma(O_3) = (\pi_{O_3} \circ \pi_A)(O_3) = \pi_{O_3}(O_2) = A,$$

luego el centro de la perspectividad σ es $\overline{CI} \cap \overline{O_3A} = Q$. Ahora bien,

$$\sigma(M) = (\pi_{O_3} \circ \pi_A)(M) = \pi_{O_3}(N) = P,$$

implica que $Q \in \overline{MP}$. (En toda perspectividad, cada recta determinada por un punto y su transformado pasa por el centro de la perspectiva.)

v) Justifíquese la veracidad de las dos siguientes afirmaciones:

a) Si una homología τ no deja invariable a una recta r, entonces el punto $r \cap \tau(r)$ es doble.

b) Una homología no tiene más puntos dobles que el centro y los pertenecientes al eje.

Obténgase i) de las proposiciones a) y b) aplicadas a la homología de centro B y eje $\overline{PQ}$ que transforma I en O_3 (1 punto).

Solución Supóngase que la holomogía τ tiene centro C, y denótese por X al punto $r \cap \tau(r)$. Puede escribirse $X = \overline{CX} \cap \tau(r)$. Ahora bien, $\tau(X) \in \overline{CX}$ pues toda recta por el centro es doble, y $\tau(X) \in \tau(r)$ ya que $X \in r$. Ambas circunstancias dan $\tau(X) = \overline{CX} \cap \tau(r) = X$. Esto justifica la parte a).

Para la parte b), admítase que X es un punto doble de la homología τ distinto del centro y fuera del eje. Tómese una recta s arbitraria por X. Como s cortará al eje en algún punto Y, se tiene que $s = \overline{XY}$ pasa por dos puntos dobles y es, por consiguiente, doble. Esto convierte a X en un segundo centro (toda recta por él es doble), mientras que no hay más proyectividad central con dos centros distintos que la identidad. Contradicción. (Una homología es, por definición, distinta de la identidad.)

Considérese ahora la homología τ de centro B y eje $\overline{PQ}$ que transforma I en O_3. Entonces $\tau(C) = \overline{BC} \cap \overline{QO_3} = A$ y $\tau(O_1) = \overline{BO_1} \cap \overline{PO_3} = N$. Esto proporciona $\tau(\overline{O_1C}) = \overline{NA}$, luego, por la parte a), $M = \overline{O_1C} \cap \overline{NA}$ es doble. La parte b) implica ahora que $M \in \overline{PQ}$.

vi) En planos sobre cuerpos de característica 2, dedúzcase i) sin más herramientas que el teorema de Fano (1 punto).

Solución En característica 2, cada punto diagonal pertenece a la recta determinada por los otros dos (teorema de fano). Esto lleva a concluir con que C es el tercer punto diagonal tras A y B, esto es, $C = \overline{O_1O_3} \cap \overline{O_2I}$. En particular, $O_2 \in \overline{CI}$. De ahí que $Q = O_2$. Considérese ahora el cuadrivértice (O_1, Q, O_3, N), cuyos puntos diagonales $P = \overline{O_1A} \cap \overline{O_3N}$, $M = \overline{O_1O_3} \cap \overline{AN}$ y $O_2 = Q = \overline{O_1N} \cap \overline{AO_3}$ ha de ser colineales.

2) En el plano proyectivo real se dan los puntos $A = (1, 0, -1)$ y $B = (0, -1, 2)$, y las rectas $r, s, t, u \in A^*$ y $r', s', t' \in B^*$ de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrc}
r \equiv & x_1 = 0, & r' \equiv & 2x_1 + x_2 = 0 \\
s \equiv & x_0 - 3x_1 + x_2 = 0, & s' \equiv & 2x_0 - 2x_1 - x_2 = 0 \\
t \equiv & 2x_0 - x_1 + 2x_2 = 0, & t' \equiv & x_0 = 0 \\
u \equiv & x_0 - x_1 + x_2 = 0. & &
\end{array}$$

i) Justifíquese por qué las rectas

$$\overline{(r \cap s')(r' \cap s)}, \ \overline{(r \cap t')(r' \cap t)} \ \text{ y } \ \overline{(s \cap t')(s' \cap t)}$$

concurren, sin calcular las ecuaciones de ninguna de las tres (1 punto).

Solución Solo es preciso aplicar el dual del teorema de Pappus a las ternas de rectas concurrentes (r, s, t) y (r', s', t').

ii) Sea $\sigma : A^* \to B^*$ la proyectividad entre haces que transforma r en r', s en s' y t en t'. Hállese la ecuación de $u' = \sigma(u)$ (0.5 puntos).

Solución Un primer método puede usarse aprovechando que las proyectividades conservan razones dobles. Así, para calcular la razón doble $(rstu)$, se trabajaría en el sistema de coordenadas homogéneas $\{r, s; t\}$, con r en el infinito. Esto plantea la identidad

$$2x_0 - x_1 + 2x_2 = \alpha x_1 + \beta(x_0 - 3x_1 + x_2).$$

Identificando coeficientes y resolviendo el sistema en α, β se obtiene $\alpha = 5$, $\beta = 2$, luego se toma

$$r \equiv 5x_1 = 0 \quad \text{y} \quad s \equiv 2x_0 - 6x_1 + 2x_2 = 0.$$

La relación

$$x_0 - x_1 + x_2 = \alpha(5x_1) + \beta(2x_0 - 6x_1 + 2x_2)$$

implica $\alpha = \frac{2}{5}$, $\beta = \frac{1}{2}$, luego

$$(rstu) = \frac{2/5}{1/2} = \frac{4}{5}.$$

Si se escribe $t' \equiv 2x_0 = 0$, no es preciso tocar las ecuaciones de r' y t' en el sistema de coordenadas $\{r', s'; t'\}$. Por tanto, de $(r's't'u') = \frac{4}{5}$ se deduce

$$u' \equiv \frac{4}{5}(2x_1 + x_2) + 2x_0 - x_1 - x_2 = 0, \quad \text{o sea} \quad u' \equiv 10x_0 - 2x_1 - x_2 = 0.$$

Si al lector le molesta el uso de ecuaciones de rectas en vez de coordenadas de puntos, podría haber trasladado el problema a uno de proyectividades entre rectas. En efecto, para cada recta v que no pase por los puntos base de los haces, σ induce una proyectividad $\tau : v \to v$ que transforma cada punto $X \in v$ en el punto $v \cap \sigma(\overline{AX})$. Tomando una recta cómoda, por ejemplo, la $v \equiv x_2 = 0$, la proyectividad τ transforma R, R', S en S' y T en T', con $R = r \cap v = (1, 0, 0)$, $S = s \cap v = (3, 1, 0)$, $T = t \cap v = (1, 2, 0)$, $R' = r' \cap v = (1, 0, 0)$, $S' = s' \cap v = (1, 1, 0)$, $T' = t' \cap v = (0, 1, 0)$.

Otra opción habría sido la de factorizar σ como composición de perspectividades siguiendo el método gráfico.

iii) Dése la ecuación de la cónica

$$\mathcal{Q}(q) \;=\; \{v \cap \sigma(v) \;:\; v \in A^*\},$$

y clasifíquese (1 punto).

Solución Bastaría con imponer a una cónica que pase por los 5 puntos A, B, $C = r \cap r' = (1,0,0)$, $D = s \cap s' = (5,3,4)$ y $E = t \cap t' = (0,2,1)$ y resolver el sistema correspondiente. No obstante, se intuye una simplificación en los cálculos si se toma como nuevo sistema de coordenadas homogéneas el formado por $\{A, B, C; D\}$, y se dirime en él la cuestión para luego deshacer el cambio al sistema de coordenadas canónico.

Entonces, para que D sea el punto unidad, se plantea la ecuación vectorial

$$(5,3,4) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,-1,2) + \gamma(1,0,0),$$

que da $\alpha = -10$, $\beta = -3$ y $\gamma = 15$. Tómese pues $A = (-10,0,10)$, $B = (0,3,-6)$ y $C = (15,0,0)$. El cálculo de las coordenadas de E en el nuevo sistema lleva a escribir

$$(0,2,1) = \alpha(-10,0,10) + \beta(0,3,-6) + \gamma(15,0,0),$$

y $E = (3,4,2)$ en el sistema $\{A, B, C; D\}$. Siguiendo el razonamiento de la sección §II.2.2 (previo al lema II.2.1), la matriz de la forma cuadrática q adquiere en el sistema elegido el aspecto

$$q \sim N = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ \lambda & 0 & \nu \\ \mu & \nu & 0 \end{pmatrix},$$

con $\lambda + \mu + \nu = 0$ y $6\lambda + 3\mu + 4\nu = 0$, es decir,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se observa que $\mathcal{Q}(q)$ es no degenerada ($|N| \neq 0$), y no es vacía pues tiene puntos. Se trata entonces de una *elipse real.* Por último, un mínimo deber de cortesía para con quien propone el ejercicio obliga a devolver las soluciones en el mismo formato en el que se proporcionaron los datos. De ahí que se deba deshacer el cambio de coordenadas. La matriz

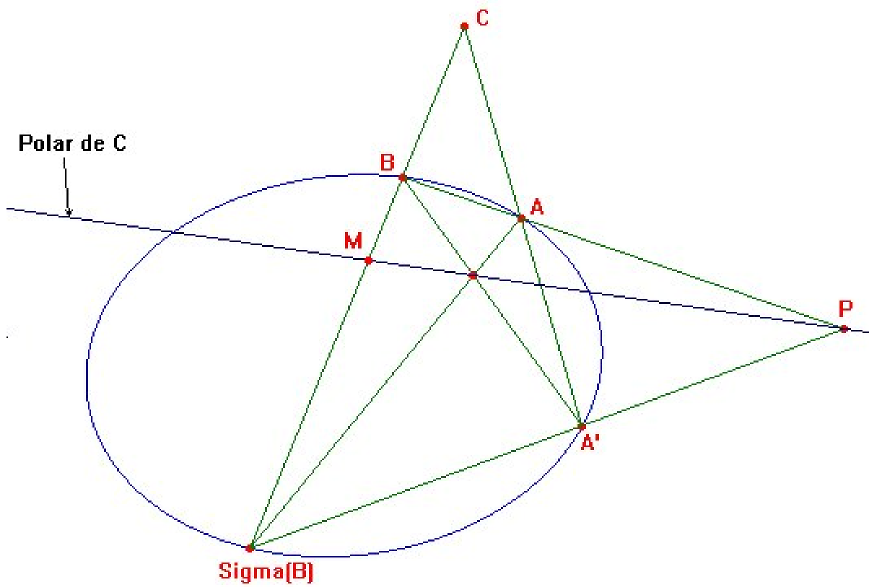
$$P = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -6 \\ 15 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ del cambio tiene por inversa a } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{15} \\ \frac{2}{10} & \frac{1}{3} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{15} \end{pmatrix}.$$

La matriz $M = QNQ^t$ de q en el sistema canónico da la ecuación pedida

$$\mathcal{Q} \equiv -6x_0x_1 + 2x_0x_2 + 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 = 0.$$

3) Sean $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(q)$ una cónica no degenerada de un plano proyectivo $\mathcal{P}(V)$ y C un punto de ese plano fuera de $\mathcal{Q}$.

i) Si r es una recta por C que corta a $\mathcal{Q}$ en A y A' ($A \neq A'$), pruébese que la homología σ de centro C y eje $C^{\perp}$ que transforma A en A' deja invariante a $\mathcal{Q}$ (1.5 puntos).



Solución Para cada punto B de la cónica distinto de las intersecciones con el eje (que son, recuérdese, los puntos de tangencia de las tangentes a

$\mathcal{Q}$ por C), la recta $\overline{CB}$ corta a $C^{\perp}$ en un punto M. La imagen de B por la homología se calcula mediante $\sigma(B) = \overline{CB} \cap \overline{PA'}$, con $P = \overline{AB} \cap C^{\perp}$. Por otro lado, es sabido (teorema II.2.6) que si $\overline{CB}$ corta a $\mathcal{Q}$ en B y B', entonces $(CMBB') = -1$. Pero C es el punto diagonal del cuadrivértice $(A, B, A', \sigma(B))$ en el que $\overline{PM}$ es la recta que pasa por los otros dos puntos diagonales. Es entonces M el cuarto armónico de la terna $(B, \sigma(B), C)$. Por último,

$$-1 = (B\sigma(B)CM) = (CMB\sigma(B))$$

implica $\sigma(B) = B'$ y la cónica es invariante por σ.

El caso restante (B sobre el eje de la homología) es trivial.

ii) De una cónica no degenerada se conocen cuatro puntos A, B, C y D, y el polo $E = r^{\perp}$ de una recta r que no contiene a los cuatro primeros. Si se diera la circunstancia de que $\overline{BD}$ pasara por E, descríbase un método gráfico que permita trazar la cónica (1 punto).

Solución La homología de centro E y eje r transforma, por ejemplo, A en otro punto A' de la cónica. No es otra cosa lo que afirma el apartado anterior. Ahora se dispone de cinco puntos de la cónica y puede recurrirse a cualquiera de los métodos de trazado gráfico conocidos.