El examen de Geometría afín y proyectiva
del 3 de julio del 2007 resuelto por cortesía de
Alberto Castellón

1) Considérese la proyectividad σ del plano proyectivo real en sí mismo que, en relación al sistema de coordenadas homogéneo canónico $\mathcal{S}$, transforma

$$\begin{array}{rcc} A=(1,1,0) & \mapsto & A'=(-1,0,2) \\ B=(0,1,2) & \mapsto & B'=(1,1,2) \\ C=(0,1,0) & \mapsto & C'=(-1,1,0) \\ D=(2,2,2) & \mapsto & D'=(0,0,4). \end{array}$$

i) Escríbase la ecuación de σ respecto a $\mathcal{S}$. (1 punto).

ii) Si $r=\overline{BC}$, compruébese que $s=\sigma(r)$ es la recta de ecuación $x_0+x_1-x_2=0$ (0.5 puntos).

iii) Sea $\tau : r \to s$ la proyectividad obtenida restringiendo σ de dominio e imagen. Fíjense sistemas de coordenadas homogéneas $\{P,Q;R\}$, en la recta r, y $\{U,V;W\}$, en la recta s, con $P=(0,1,0)$, $Q=(0,0,1)$, $R=(0,1,1)$, $U=(2,-1,1)$, $V=(1,0,1)$, $W=(3,-1,2)$, y tomando a P y a U como respectivos puntos del infinito para el paso a abscisas. Hállese la ecuación general de τ referida a tales sistemas de coordenadas (1 punto). Indicación: Calcúlense las abscisas de $\tau(P)$, $\tau(Q)$ y $\tau(R)$ en el segundo de los sistemas de coordenadas. Recuérdese que, al elegir P como punto impropio de r, entonces $\tau(P)$ no es sino uno de los puntos límite de τ.

Solución De suponer correcto el enunciado, debe ser (A,B,C,D) un símplex, y (A',B',C',D') un segundo símplex, para que, según el teorema fundamental, σ esté determinada solo con los datos proporcionados. De ahí que se consideren los sistemas de coordenadas homogéneas $\{A,B,C;D\}$ y $\{A',B',C';D'\}$. Puede entonces factorizarse σ en la forma $\sigma=\sigma_2\circ\sigma_1$ con

$$\begin{array}{rcccc} & \sigma_1 & & \sigma_2 & \\ A=(1,1,0) & \mapsto & (1,0,0) & \mapsto & A'=(-1,0,2) \\ B=(0,1,2) & \mapsto & (0,1,0) & \mapsto & B'=(1,1,2) \\ C=(0,1,0) & \mapsto & (0,0,1) & \mapsto & C'=(-1,1,0) \\ D=(2,2,2) & \mapsto & (1,1,1) & \mapsto & D'=(0,0,4). \end{array}$$

Se verá a continuación qué vectores engendrando a los puntos base A, B y C hay que elegir para que D sea el punto unidad. Se plantea entonces la combinación lineal

$$(2,2,2)=\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,2)+\gamma(0,1,0),$$

que proporciona los valores $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$. Así, la matriz P^{-1} de σ_1^{-1} es

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando la inversa, se tiene

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando de forma análoga con el segundo sistema de coordenadas homogéneas $\{A', B', C'; D'\}$, se escribe

$$(0, 0, 4) = \alpha(-1, 0, 2) + \beta(1, 1, 2) + \gamma(-1, 1, 0),$$

ecuación vectorial que tiene por soluciones $\alpha = -\frac{2}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$, $\gamma = \frac{4}{3}$. Eso sí, como se trata de coordenadas homogéneas, no hay inconveniente en multiplicar estos 3 escalares por $\frac{2}{3}$, lo que da para la matriz Q de σ_2

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, la matriz de σ se obtendrá del producto

$$P\ Q\ = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

y la ecuación se σ no es otra que

$$\sigma \equiv \lambda(x_0', x_1', x_2') = (x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese cómo se ha dividido por 2 la matriz para que la expresión resulte más simple, lo que está permitido en coordenadas homogéneas.

Otro método lícito sería, una vez expresados los respectivos puntos base en forma apropiada, plantear ecuaciones vectoriales del tipo

$$\begin{aligned}
(1, 0, 0) &= \alpha_{00}(2, 2, 0) + \alpha_{01}(0, 1, 2) + \alpha_{02}(0, -1, 0), \\
(0, 1, 0) &= \alpha_{10}(2, 2, 0) + \alpha_{11}(0, 1, 2) + \alpha_{12}(0, -1, 0), \\
(0, 0, 1) &= \alpha_{20}(2, 2, 0) + \alpha_{21}(0, 1, 2) + \alpha_{22}(0, -1, 0).
\end{aligned}$$

Calculados los α_{ij}, la primera fila de la matriz de σ sería

$$\alpha_{00}(-2,0,4)+\alpha_{01}(1,1,-2)+\alpha_{02}(1,-1,0),$$

y lo mismo para las dos filas restantes.

Sin embargo, es por completo inapropiado tratar a σ de primera hora como una aplicación lineal esgrimiendo argumentos del tipo

$$(1,0,0)=(1,1,0)-(0,1,0) \text{ implica } \sigma(1,0,0)=(-1,0,2)-(-1,1,0).$$

Y es que ni siquiera tiene sentido hablar del carácter lineal de un proyectividad ya que, en los espacios proyectivos, no existe una estructura de espacio vectorial. La suma de puntos es, bien un punto, si son iguales, bien una recta, si son distintos. La suma se entiende en el retículo de subespacios, y no como afectando a elementos o vectores. De la igualdad (vectorial) $(1,0,0)=(1,1,0)-(0,1,0)$ solo se deduce que el punto A se transforma por σ en un punto de la recta $\overline{A'C'}$, que no necesariamente es el $(0,-1,2)$.

Para la parte ii), basta advertir que $\sigma(\overline{BC})=\overline{B'C'}$ y que las coordenadas de B' y C' satisfacen la ecuación $x_0+x_1-x_2=0$.

Por último, en la parte iii) ya se han expresado P, Q, R, U, V y W de forma que las coordenadas homogéneas de R son suma de las de P y Q, así como las de W, suma de las de U y V. Se tienen entonces sendos sistemas $\{P,Q;R\}$ de r, y $\{U,V;W\}$ de s. También es evidente que los tres primeros puntos pertenecen a $r=\overline{BC}\equiv x_0=0$, y los tres últimos a $s=\overline{B'C'}\equiv x_0+x_1-x_2=0$. Escríbase pues la ecuación general de τ en forma genérica

$$\tau\equiv\lambda xx'+\mu x+\nu x'+\zeta=0.$$

Se trata de encontrar los coeficientes λ, μ, ν y ζ. Se sabe que el punto límite de τ tiene por abscisa $x'=-\frac{\lambda}{\mu}$. Pero este punto es la imagen de P, o sea,

$$\tau(P)=(0,1,0)\begin{pmatrix}0&-1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=(-1,0,1).$$

Debe hallarse ahora la abscisa de $(-1,0,1)$ en el sistema $\{U,V;W\}$ con U en el infinito. Plantéese a tal fin la ecuación

$$(-1,0,1)=\lambda_0(2,-1,1)+\lambda_1(1,0,1),$$

que desemboca en $\lambda_0 = -1$, $\lambda_1 = 1$. Así, $\tau(P)$ tiene abscisa $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = -1$. Esto, unido a que la abscisa del punto límite es $-\frac{\lambda}{\mu}$, da $\lambda = \mu$. Por otro lado,

$$\tau(Q) = (0,0,1)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,0,1).$$

Pero $(1,0,1)$ son las coordenadas del punto V. Esto implica que el punto origen Q (de abscisa 0) del primero de los sistemas de coordenadas se aplica sobre el origen V, del segundo. Es decir, $x = 0$ implica $x' = 0$, lo que obliga a $\zeta = 0$. Por último, el punto unidad R (de abscisa 1) es tal que

$$\tau(R) = (0,1,1)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,1,1).$$

El cálculo de la abscisa de $(0,1,1)$ lleva a escribir

$$(0,1,1) = \lambda_0(2,-1,1) + \lambda_1(1,0,1),$$

que tiene como soluciones $\lambda_0 = -1$, $\lambda_1 = 2$. O sea, para $x = 1$ debe ser $x' = \frac{2}{-1} = -2$. Sustituyendo en la ecuación general de τ se tiene $\lambda + \mu - 2\nu = 0$. Haciendo $\lambda = \mu = 1$ se concluye con

$$\tau \equiv xx' + x + x' = 0.$$

2) Demuéstrense las siguientes propiedades en un plano afín.

i) Si los paralelogramos (A, C, B, D) y (A', C, B', D') tienen un ángulo común en C (figura 1), entonces las rectas $\overline{DD'}$, $\overline{AB'}$ y $\overline{A'B}$ son, o bien concurrentes, o bien paralelas dos a dos (1.5 puntos).

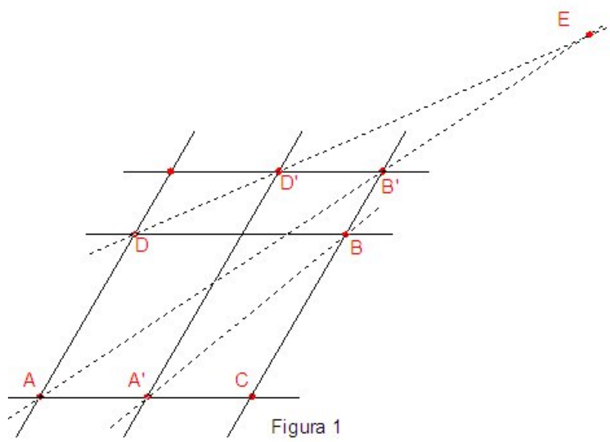

Figura 1

ii) Si los paralelogramos (A, B, C, D) y (A', B', C', D') satisfacen $\overline{AB} \| \overline{A'B'}$, $\overline{AD} \| \overline{A'D'}$ y las rectas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ concurren en un punto O, entonces $\overline{DD'}$ también pasa por O (1 punto).

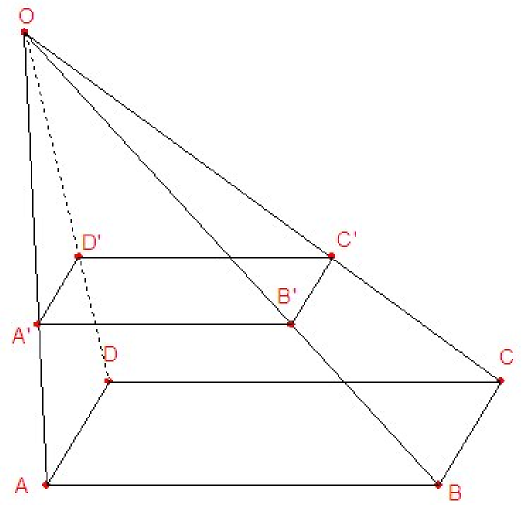

Figura 2

Solución Para la parte i) se trabajará en la envolvente proyectiva del plano afín. Allí, las rectas $a = \overline{AA'}$, $b = \overline{DB}$ y $c = \overline{D'B'}$ concurren en un punto (impropio) X, así como $p = \overline{AD}$, $q = \overline{A'D'}$ y $r = \overline{BB'}$ lo hacen en otro punto (también impropio) Y. Por el dual del teorema de Pappus, aplicado a las ternas de rectas concurrentes (a, c, b) y (r, p, q), se tiene que $\overline{(a \cap p)(c \cap r)} = \overline{AB'}$, $\overline{(a \cap q)(b \cap r)} = \overline{A'B}$ y $\overline{(c \cap q)(b \cap p)} = \overline{DD'}$ son, así mismo, concurrentes, que es lo que se quería demostrar.

En la parte ii) comiéncese observando que los triángulos (A, B, C) y (A', B', C') están en la configuración de Desargues ya que $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ concurren en O. Como $\overline{AB} \| \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \| \overline{B'C'}$, una de las versiones afines del teorema de Desargues afirma que $\overline{AC} \| \overline{A'C'}$. Ahora los triángulos (A, C, D) y (A', C', D') se encuentran en la configuración reíproca de Desargues ya que $\overline{AC} \| \overline{A'C'}$, $\overline{AD} \| \overline{A'D'}$ y $\overline{DC} \| \overline{D'C'}$. De nuevo la versión afín del teorema de Desargues implica que $\overline{DD'}$ pase por el punto en que concurren $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$, que no es otro que O.

3) En el espacio proyectivo $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, considérese la cuádrica

$$\mathcal{Q} \equiv -2x_0^2 + x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^3 + 4x_0x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0.$$

i) Encuéntrese un sistema de coordenadas en el que $\mathcal{Q}$ se exprese en forma reducida (1 punto).

ii) Clasifíquese la cuádrica en cuestión (1 punto).

iii) ¿Cuál sería su clasificación como cuádrica compleja de $\mathcal{P}_3(\mathbb{C})$? (0.5 puntos).

Solución La matriz de la forma cuadrática es

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A simple vista se advierte que $u_0 = (0,1,0,0)$ no es isótropo ya que $q(u_0) = 1$. Entonces

$$< u_0 >^{\perp} \equiv x_1 - x_3 = 0.$$

Eligiendo $u_1 = (0,1,0,1) \in < u_0 >^{\perp}$, con $q(u_1) = 1$, se tiene

$$< u_0, u_1 >^{\perp} \equiv \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Tómese, por ejemplo, $u_2 = (0,1,1,1) \in < u_0, u_1 >^{\perp}$. Esta elección es de nuevo lícita ya que $q(u_2) = 4 \neq 0$. Ahora

$$< u_0, u_1, u_2 >^{\perp} \equiv \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Es entonces $u_3 = (-2,1,1,1) \in < u_0, u_1, u_2 >^{\perp}$ con $q(u_3) = -12$. En el sistema de coordenadas homogéneas $\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$, la matriz M diagonaliza en la forma $M = \mathrm{diag}(1,1,4,-12)$, y la ecuación de la cuádrica reduce a

$$x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2 - 12x_3^2 = 0.$$

La parte ii) es ahora evidente pues, a la vista de la matriz diagonalizada (o de la ecuación reducida), se advierte que la cuádrica tiene rango 4 e índice de Witt 1. Se trata entonces de un elipsoide real no reglado. Sin embargo, como cuádrica compleja debería poseer índice máximo, en este caso, 2, luego sería un elipsoide reglado de $\mathcal{P}_3(\mathbb{C})$, lo que finaliza el apartado iii).

4) En un plano afín se consideran una cónica no degenerada $\mathcal{Q}_1$ y una recta r secante a $\mathcal{Q}_1$ en A y B. Sea M el punto medio entre A y B.

i) Pruébese que la polar de M es paralela a $\overline{AB}$ (0.5 puntos).

ii) Trácense por M otras 2 rectas distintas que intersecan a $\mathcal{Q}_1$ en puntos C, D, E y F. Denótense por P y Q a los respectivos cuartos armónicos de las ternas (E, F, M) y (C, D, M). ¿Por qué es $\overline{PQ}$ la polar de M? (1 punto)

iii) Elíjase una cónica arbitraria no degenerada $\mathcal{Q}_2$ que pase por C, D, E y F y que corte a r en A' y B'. Demuéstrese que M es también el punto medio entre A' y B' (1 punto). (Este resultado se conoce como el *teorema generalizado de la mariposa.*)

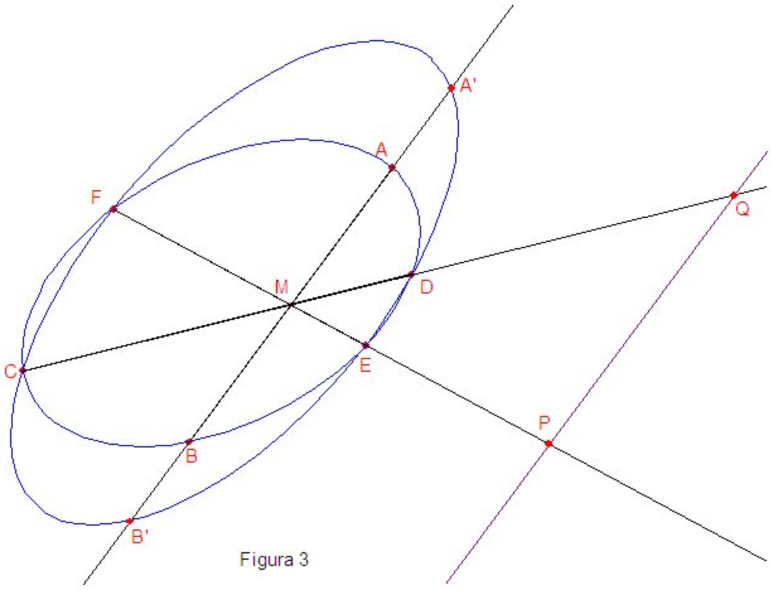

Figura 3

Solución En la envolvente proyectiva del plano afín, denótese por X al punto del infinito de $\overline{AB}$. Como $M = \frac{A+B}{2}$ en el afín, en el proyectivo se tendrá $(XMAB) = -1$, lo que implica que $X \in M^{\perp}$. (Se ha aplicado el teorema II.2.6 de los apuntes.) Ahora bien, que X sea el punto impropio de la polar de $\overline{AB}$, implica que ambas rectas sean, en el afín, paralelas, pues ambas comparten punto del infinito.

Para la parte ii), el hecho de que (Q, M) sean conjugados armónicos de (C, D), con estos dos puntos en $\mathcal{Q}_1$, implica que Q y M son conjugados respecto de la cónica, o sea, $Q \in M^{\perp}$. Por la misma razón, P pertenece a la polar de M, luego $M^{\perp} = \overline{PQ}$.

Por último, el mismo razonamiento del apartado anterior aplicado a la segunda cónica lleva a concluir con que $\overline{PQ}$ también es la polar de M respecto de $\mathcal{Q}_2$. Entonces (X, M) (con X el punto impropio de la primera parte) son conjugados armónicos de (A', B'), luego M es el punto medio entre A' y B'.

Es preciso advertir aquí que se ha deslizado una omisión en el enunciado del ejercicio. Y es que M podría caer justo en el centro de $\mathcal{Q}_1$ (si es que esta cónica tiene centro), o, de modo equivalente, la recta $\overline{AB}$ fuera un diámetro. En tal caso, la polar (proyectiva) de

M sería la propia recta del infinito. No obstante, el teorema generalizado de la mariposa sigue satisfaciéndose en este caso. Los razonamientos esgrimidos más arriba deben ahora modificarse un poco. Sin embargo, estas menudencias se dejan para el lector preocupado en estas sutilezas.