PERSPECTIVA CÓNICA CON CABRI GÉOMÈTRE

Alberto Castellón Serrano

Índice

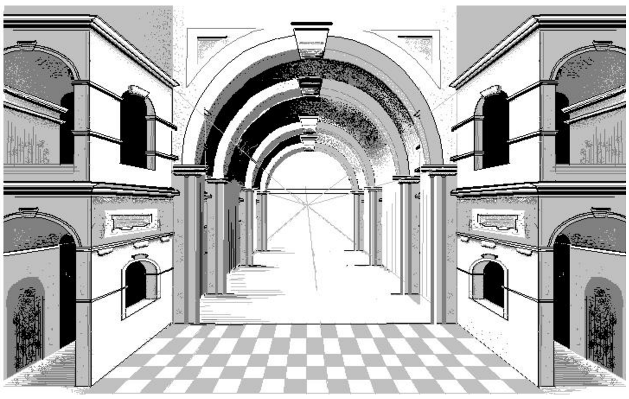
§Fundamentos matemáticos

§Sistema cónico de perspectiva

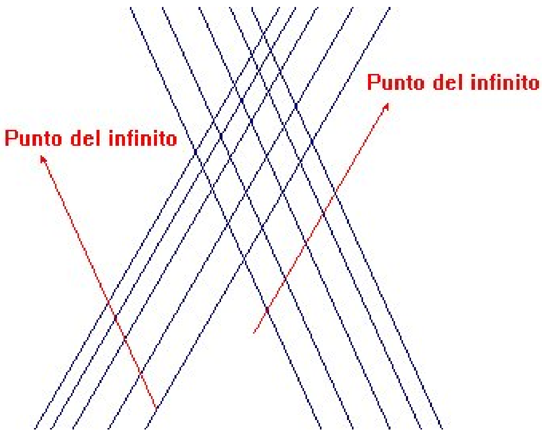
§ Simulación dinámica de un ejemplo.

Fundamentos matemáticos

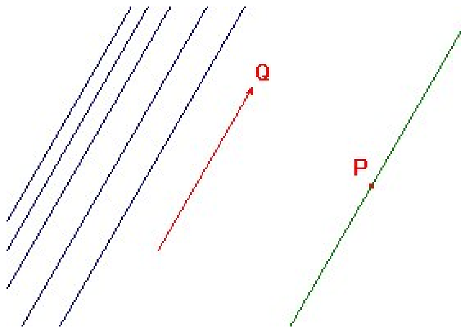
De entre los distintos modos de representación de cuerpos espaciales en un plano, el sistema cónico de perspectiva es el que responde a un mayor verismo al basarse en los mismos principios de la visión humana, la fotografía o la pintura realista. En esencia, la idea se genera en el hecho de que si se contempla una escena desde un punto fijo V, todos los rayos de luz que alcanzan a V no son sino líneas rectas pasando por V. Escogiendo un plano π que no contenga a V, cada una de aquellas rectas cortará a π según un punto. El conjunto de estos puntos constituye una proyección de los objetos observados que el cerebro interpretará con tanta facilidad como el modelo original. Y ello es fácil de entender pues si se prescinde ahora del paisaje para mirar su proyección sobre π y se sitúa el ojo en igual posición relativa respecto al plano, habrán de confluir en la retina las mismas rectas que las primitivas y procendentes de idénticas direcciones. En el caso de una instantánea, el objetivo de la cámara juega el papel del centro de la perspectiva V, mientras que la película o el panel de células fotosensibles definen al plano π. En el arte pictórico, son la pupila del dibujante y el lienzo los que determinan el punto V y el plano π.



Tales mecanismos ya eran conocidos por los pintores del renacimiento, quienes llegaron a concebir una nutrida gama de ingeniosas máquinas que reproducían el fenómeno de la proyección. El lector interesado en el particular puede consultar los grabados de Alberto Durero pinchando aquí. Sin embargo, el salto del nivel empírico al de la construcción de una base teórica rigurosa fue dado por el matemático marsellés Girad Desargues (1591-1661). Desargues comenzó advirtiendo que rectas paralelas del mundo real tal vez pierdan el paralelismo en el proceso de su representación. Imagínese, por ejemplo, que desde un puente sobre la vía férrea se divisa la trayectoria rectilínea de las vías. Los rieles, en principio paralelos, parecen converger en un punto de la lejanía clavado al horizonte. Y lo mismo sucede con las cornisas y zócalos de los edificios o los dinteles y umbrales de las puertas. A estos puntos de intersección no se accede en el mundo real, pero sí que tienen su correspondiente proyección sobre el plano de un cuadro. De ahí que, para que la correspondencia fuese total, Desargues maquinó el artificio de añadirlos por las bravas.



En concreto, por cada haz de rectas paralelas del plano ordinario, agrégese un punto denominado *impropio* o *del infinito*, y convéngase en que semejante punto pertenece a todas las rectas del haz. A cada dirección del plano se le ha asignado entonces un punto del infinito. Además, reúnase la totalidad de estos puntos del infinito en un conjunto que se llamará *recta del infinito* o *recta impropia*. Al resultado de aumentar el plano mediante la incorporación de los puntos del infinito a su familia de puntos, y de la recta impropia a su familia de rectas se le conoce como *plano proyectivo*. Para distinguir el plano ordinario del plano proyectivo, al primero se le aplicará el adjetivo *afín*. Dicho de otro modo, el plano afín resulta del proyectivo al elimininarle los puntos del infinito. No deja de ser sorprendente que después de esta importante extensión del afín al proyectivo siga verificándose un hecho crucial, a saber, que por cada par de puntos distintos P y Q pasa una única recta. Para cuando P y Q estén en el afín, la cuestión es evidente. Si P es un punto afín y Q es el punto impropio asociado a un haz de paralelas (del afín), solo hay una recta (afín) r del haz que contiene a P. De ahí que la recta (proyectiva) $\overline{PQ}$ no sea otra que la que se obtiene al incorporar Q a r.



Por último, si P y Q son puntos impropios, es la recta del infinito la única incidente con ambos.

Pero lo gracioso del asunto es que el plano proyectivo satisface una curiosa propiedad: cada par de rectas r y s distintas tienen exactamente un punto en común. En efecto, si r y s ya se intersecaban en el plano ordinario, se debe a que no eran paralelas, lo que las imposibilita para compartir un punto impropio y han de cortarse en un único punto afín. Si se daba el paralelismo entre las partes afines de r y s, entonces ambas pasan por el punto del infinito del haz de paralelas en el que se integraban y siguen intersecándose en un único punto, ahora impropio. Y en el caso restante, con r la recta del infinito y s otra recta cualquiera, ambas incidirán en el punto impropio de s.

La segunda idea clave de Desargues es el concepto de homología. Al restringir la discusión de este artículo al plano real, las definiciones que se darán en lo que sigue serán bastante simples, aunque se advierte de que no funcionarían del todo en estructuras matemáticas más generales. Para empezar, por *proyectividad* se entiende a una biyección[1] del plano proyectivo en sí mismo que transforma puntos alineados en puntos alineados, es decir, cada vez que haya 3 puntos distintos A, B y C con A sobre la recta $\overline{BC}$, entonces el transformado A' de A pertenece a la recta $\overline{B'C'}$ determinada por las respectivas imágenes B' y C' de B y C.

Las proyectividades se clasifican atendiendo a sus elementos dobles. Dada una proyectividad, de un punto P se dirá que es *doble* si $P' = P$, esto es, si P se transforma en sí mismo por la proyectividad. Una recta r será *doble* si pasa por las imágenes de cada uno de sus puntos, o sea, la imagen P' pertenece a r para todo punto P de r. Adviértase que las rectas dobles no tienen por qué estar compuestas por puntos dobles. Así, si se sabe que P es un punto de una recta doble r, solo se puede afirmar de su transformado P' que también pertenece a r, pero no necesariamente ha de coincidir con P. De entre los distintos tipos de proyectividades, las más interesantes para su applicación a la perspectiva cónica son las homologías.

Se define una *homología* como una proyectividad que satisface las propiedades:

i) Existe un punto C tal que cada recta que pase por él es doble.

ii) Hay una recta r integrada por puntos dobles.

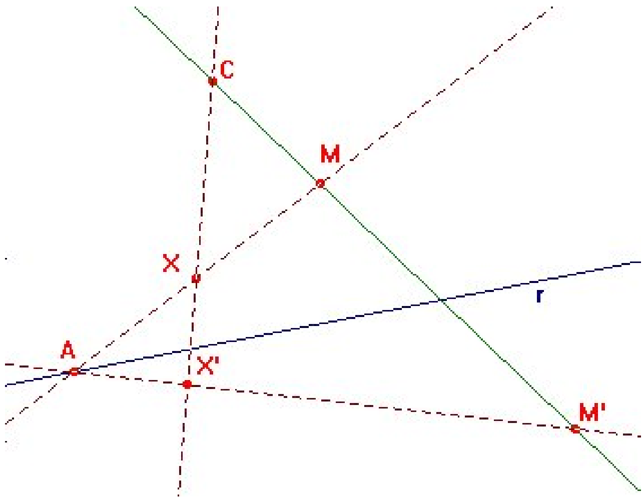
Al transformado P' de un punto P por una homología se le suele llamar *homólogo* de P.

No es difícil demostrar que los requisitos i) y ii) son redundantes, en el sentido de que cada proyectividad que satisfaga uno de ellos verifica automáticamente el otro. Si se toman dos rectas r y s distintas y pasando por C, se tiene $C = r \cap s$[2], y como r y s han de ser dobles, el homólogo C' de C debe pertenecer tanto a r como a s, en definitiva, $C' = r \cap s$ y $C = C'$. Un argumento semejante prueba que la recta r a la que se alude en ii) es, así

[1] *Una aplicación biyectiva entre dos conjuntos A y B es una asociación $x \mapsto x'$ entre los elementos de A y los de B, de forma que elementos distintos tienen asociados distintos. Al asociado x' de un elemento x de A se le conoce por* imagen *o* transformado *de x.*

[2] *Léase el símbolo $\cap$ como* intersección.

mismo, doble. Además, también hay un razonamiento sencillo que desemboca en el siguiente hecho: Si para una homología hay dos o más puntos en las condiciones i), o dos o más rectas en las condiciones ii), entonces todo punto del plano es doble. Cuando se dé esta circunstancia, en que cada punto se transforma en sí mismo, se dirá de la homología que es la identidad. Por consiguiente, para una homología diferente de la identidad solo existen un punto C y una recta r con las propiedades i) y ii). A C se le denominará *centro* de la homología, y a r, *eje* de la homología.



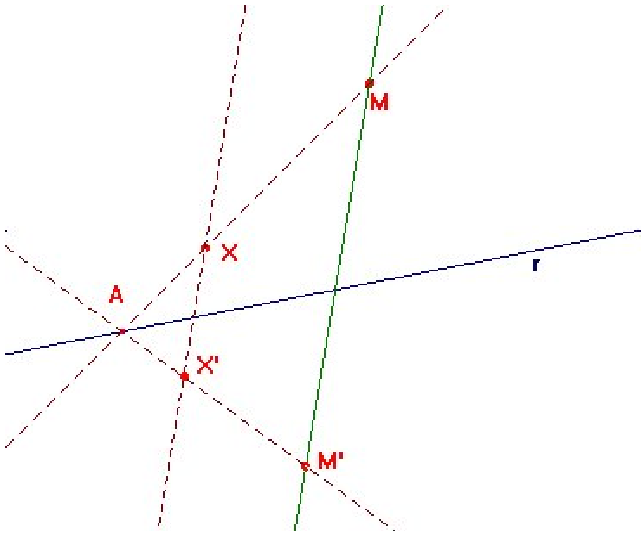
Es fácil hallar el transformado de un punto por una homología cuando se proporcionan algunos datos de esta. Por ejemplo, supóngase que de una homología se conocen el centro C, el eje r y una pareja de puntos homólogos distintos M y M'. Como $M \neq M'$, entonces M y M' no pueden coincidir con C ni situarse sobre r, ya que todos estos puntos son dobles. Eso sí, la recta $\overline{CM}$ es doble, luego $M' \in \overline{CM}$. Se desea hallar la imagen X' de cualquier punto X del plano. Se distinguirán varios casos.

Caso i) $X = C$ o $X \in r$. Aquí $X' = X$ pues C es doble y r está llena de puntos dobles.

Caso ii) $X \notin r$ y $X \notin \overline{CM}$ (véase la figura de arriba). La recta $\overline{MX}$ cortará al eje r en cierto punto doble A. Como $X \in \overline{AM}$, su imagen X' ha de pertenecer a la recta $\overline{AM'}$. Por otro lado, toda recta por C es doble, luego el transformado X' debe caer también sobre $\overline{CX}$. Las dos condiciones sobre

X' implican $X' = \overline{AM'} \cap \overline{CX}$.

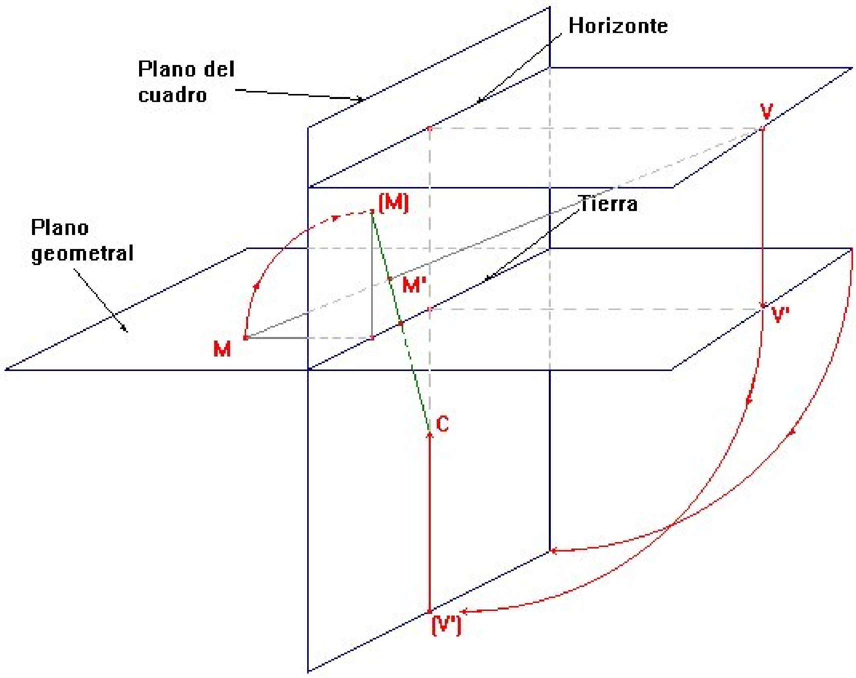
Caso iii) $X \in \overline{CM}$. Trazando la imagen N' de cualquier otro punto N fuera de la recta $\overline{CM}$, puede reducirse el cálculo al caso ii).



Un tipo particular de homologías se presenta cuando el centro C está en el infinito y el eje r no es la recta impropia. En esta circunstancia se hablará de *dilatación*. Como antes, también es fácil trazar la imagen X' de un punto X por una dilatación de la que se conocen el eje r y un par de puntos homólogos M y M'. En concreto, como la recta $\overline{MX}$ interseca a r en un punto doble A, el transformado X' debe incidir con la recta $\overline{AM'}$. Y si C es el punto impropio de la recta $\overline{MM'}$, la recta determinada por C y X es la paralela a $\overline{MM'}$ por X. De ahí que X' se sitúe en la intersección de esta última recta con $\overline{AM'}$. Este argumento funciona si $X \notin \overline{MM'}$. En caso contrario habría que recurrir a la artimaña descrita en el caso iii) anterior.

Al lector usuario de CABRI Géomètre le resultará ahora sencillo escribir macros para el trazado de la imagen de un punto por una homología (de centro en el afín) o de una dilatación. Para las primeras, los objetos iniciales debieran ser el centro, el eje, un par de puntos homólogos y el punto del que se quiere hallar su transformado, mientras que en las dilataciones no se incluiría al centro como objeto inicial.

Sistema cónico de perspectiva



Los elementos imprescindibles para el sistema cónico de perspectiva son:

i) un punto fijo V, que será el punto de vista del observador,

ii) un plano que no pasa por V denominado *plano del cuadro* o *plano de proyección*, habitualmente colocado en vertical, y

iii) un plano utilizado para referencias métricas llamado *geometral*, y que se acostumbra a colocar horizontal.

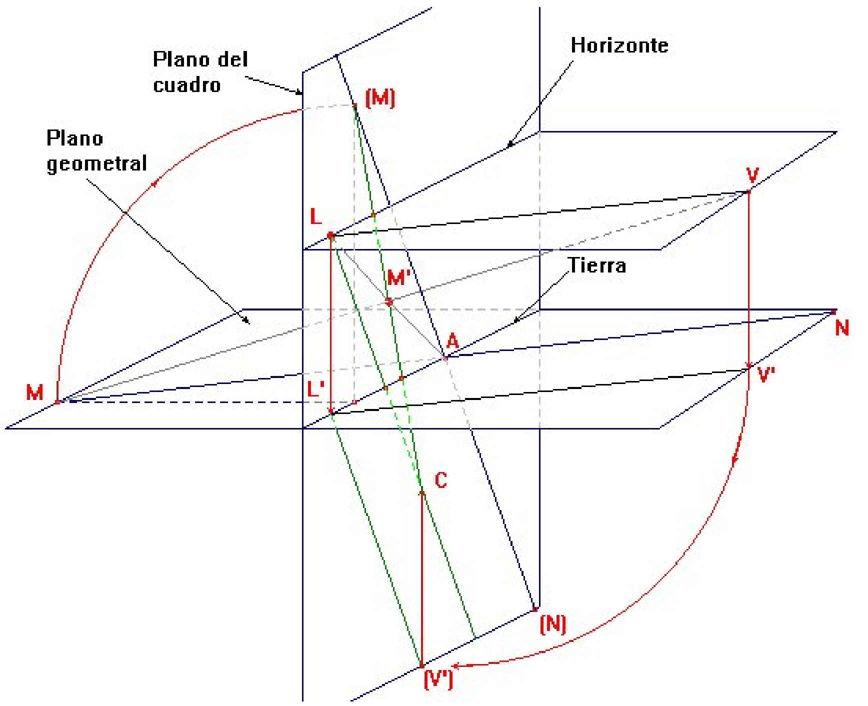
No obstante, son posibles otras disposiciones en cuanto a la inclinación de estos planos. Al plano que pasa por V y es paralelo al geometral se le conoce como *plano del horizonte*, el cual corta al plano del cuadro en la *línea del horizonte*. A la intersección del plano geometral con el plano del cuadro se le denomina *línea de tierra*. Se supondrá que los objetos situados sobre el plano geometral están representados a una escala fija, que es con la que se desea llevar a cabo su proyección sobre el plano del cuadro.

La idea básica de la representación en perspectiva ya fue anticipada en la sección anterior, pero ahora se tratará con rigor científico. Un punto M del plano geometral es visto desde V según la dirección de la recta $\overline{MV}$, la cual cortará al plano del cuadro en su proyección M'. Se trata de encontrar un método para el trazado de M'. La técnica más apropiada para ello pasa por abatir el plano geometral sobre el plano del cuadro mediante un giro alrededor de la línea de tierra. De esa forma se trabaja solo con un único plano en vez de con dos. Este abatimiento llevaría el punto M al punto que en la figura se ha denotado por (M). ¿Qué punto debería realizar las funciones de V tras este abatimiento? En primer lugar, habría que proyectar perpendicularmente el punto V sobre el plano geometral hasta un punto V'. La distancia d entre V y V' es la misma que la que media entre la línea del horizonte y la de tierra. Al abatir el plano geometral, V' aterriza en un punto (V'). Sin embargo, debería compensarse el desplazamiento inicial d de V hasta V', por lo que habrá que considerar el punto C que se encuentra en la perpendicular a tierra por (V), y a una distancia d de este.

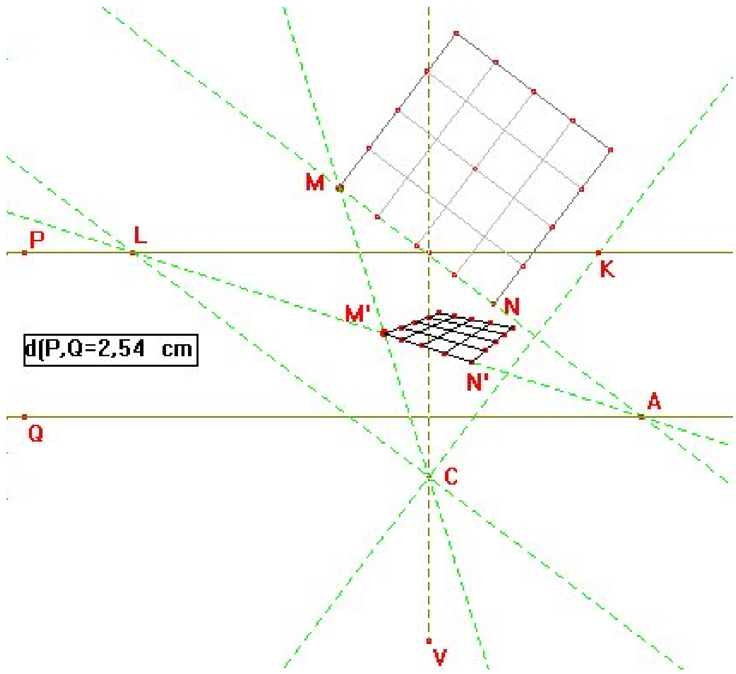
Ahora son varias las circunstancias dignas de mención. Es evidente que rectas del plano geometral serán vistas desde V también como líneas rectas y tienen, por consiguiente, una proyección rectilínea en el plano del cuadro. De ahí que la biyección $(M) \mapsto M'$ no sea otra cosa que una proyectividad. Los puntos situados sobre la línea de tierra no se mueven tras el abatimiento y se proyectan sobre sí mismos, luego la línea de tierra está compuesta por puntos dobles. Además, el punto (M) se observará desde C en el lugar M'. Dicho de otra forma, la recta $\overline{C(M)}$ es doble. Basta recapacitar un instante para concluir con que la proyectividad de la que se está hablando es una homología de centro C y eje la línea de tierra. Según se vio en la sección anterior, bastará conocer un par de puntos homólogos para tener resuelto el problema del trazado de la imagen de cualquier otro punto por la homología.

Para ello, concíbase una recta $r = \overline{MN}$ del plano geometral que corta a tierra en A. (Sígase el razonamiento según la figura de la página siguiente.) Esta recta se abate sobre el cuadro según la recta $\overline{(M)(N)}$ que sigue pasando por A. Visto M desde V, se localiza hacia la proyección M'. Supóngase ahora que M se desplaza sobre la recta alejándose cada vez más de tierra.

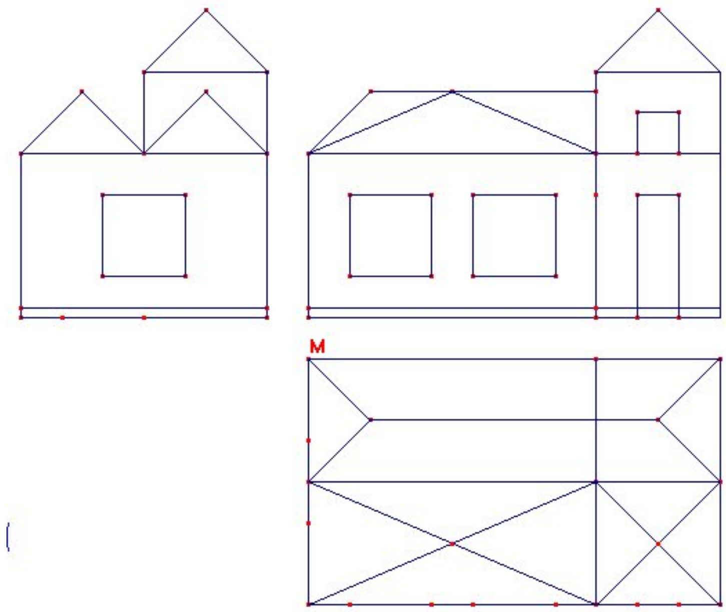
Cuando M alcance el infinito, el observador lo contemplará proyectado en un punto L del horizonte, denominado *punto de fuga* de r, que no es más que la intersección de la línea del horizonte con el plano determinado por r y V. Adviértase que las rectas $\overline{VL}$ y $\overline{MN}$ son paralelas. Siguiendo el esquema de abatimientos y proyecciones descrito más arriba, la recta $\overline{VL}$ se proyecta perpendicularmente sobre el plano geometral en la recta $\overline{L'V'}$, y se abate sobre el plano del cuadro según $\overline{L'(V')}$.



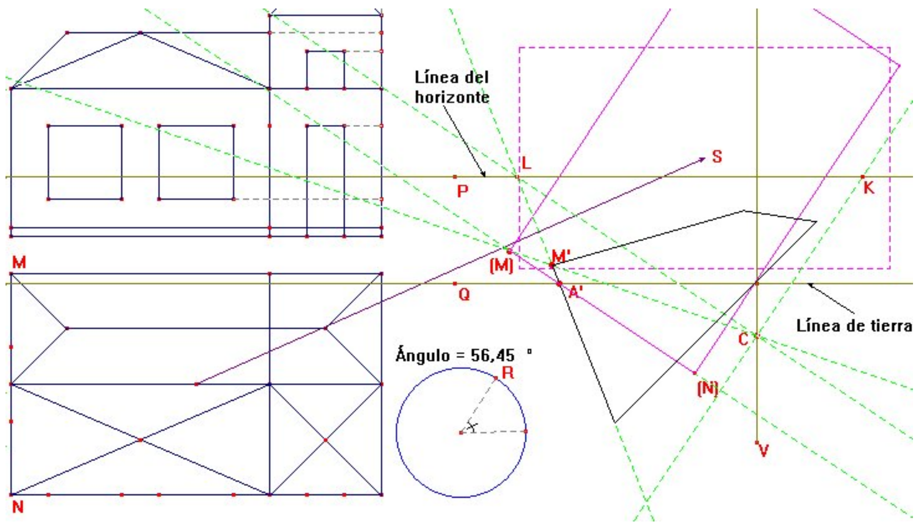
Por último, hay que compensar el desplazamiento d entre V y V' para transformar $\overline{L'(V')}$ en la recta $\overline{LC}$. Todas estas manipulaciones no consiguen deshacer el paralelismo original y $\overline{LC}$ permanece paralela a $\overline{(M)(N)}$. Esto permite el trazado del punto de fuga L. En concreto, si A es la intersección de $\overline{(M)(N)}$ con tierra, entonces el punto de fuga L de r se obtiene como la intersección con la línea del horizonte de la paralela a $\overline{(M)(N)}$ por C. Y una vez hallado el punto de fuga, puede calcularse el homólogo M' de (M) mediante $M' = \overline{AL} \cap \overline{C(M)}$. Se ilustrará todo esto con un ejemplo práctico.



Supóngase que se dispone del dibujo de la planta de un cuadrado cuadriculado. Trácense la línea del horizonte por un punto P, y la línea de tierra por Q paralela a la anterior. Sea d la distancia entre estas dos líneas. Elíjase el punto de vista V, lo cual impone que el centro de la homología C se ubique en la semirrecta por V perpendicular a tierra, y a una distancia d de V. Si M y N son dos de los vértices del cuadrado, la recta $\overline{MN}$ cortará a tierra en un cierto A. El punto de fuga L de $\overline{MN}$ se obtiene como intersección con el horizonte de la paralela a $\overline{MN}$ por C, mientras que M ha de proyectarse entonces en $M' = \overline{AL} \cap \overline{CM}$. Conocidos pues el centro C, el eje r y un par de puntos homólogos M y M' de la homología, es fácil abordar la proyección del resto de puntos de la cuadrícula mediante el uso de la macro CABRI correspondiente. Aunque no se ha precisado de él, en la figura se ha señalado también el punto de fuga K del otro lado del cuadrado. Esta proliferación de puntos de fuga solo es útil cuando no se dispone más que de las herramientas tradicionales del dibujo lineal y son innecesarias con un paquete como CABRI.

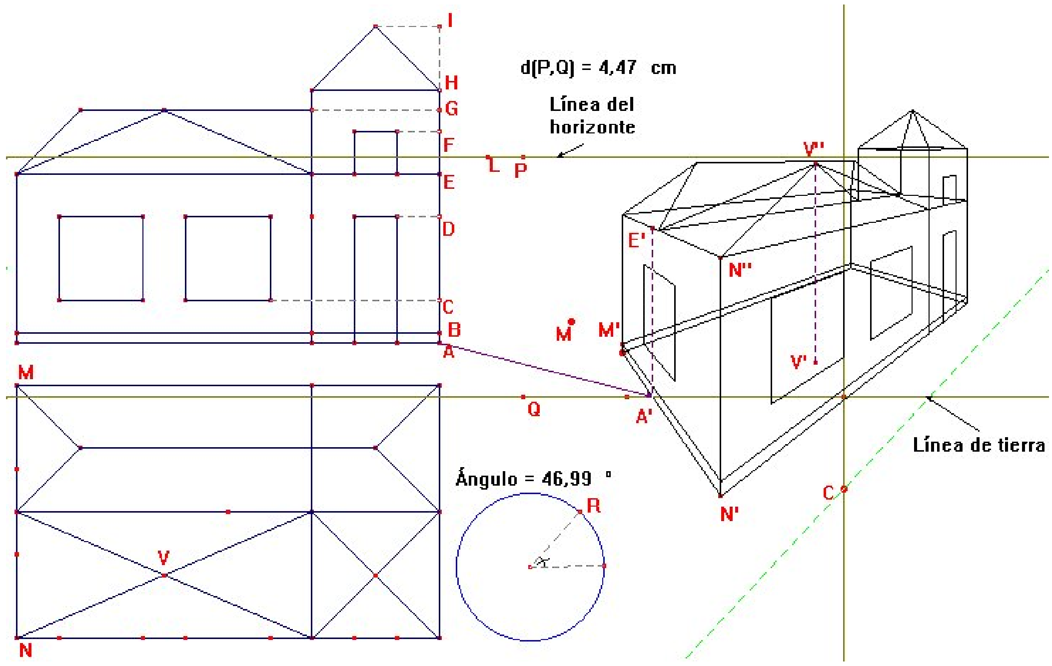


Resuelto el problema para los objetos del plano geometral, a continuación se abordará cómo representar puntos que están fuera de aquel. Supóngase que son dadas la planta, el alzado y el perfil de un edificio y se quiere dibujarlo en perspectiva.



Para que la simulación sea lo más general posible, trasládese el rectángulo de la planta según un vector de extremo S (en la figura se ha dibujado en violeta y con trazo discontinuo) y gírese alrededor de S según un ángulo que depende de la posición variable de un punto R sobre una circunferencia. El resultado de este movimiento euclídeo se ve en morado y con trazo continuo.

Utilícense ahora los métodos expuestos para hallar los transformados de todos los puntos importantes de la planta. En aras de la claridad, en la figura solo se han dejado visibles los extremos del rectángulo unidos por segmentos en negro. ¿Dónde irá a parar la esquina N'' de la cornisa que se sitúa en la vertical N' de la planta? Desde luego que en la recta perpendicular al horizonte por N', pero, ¿en qué punto concreto de esta recta? Para resolver la cuestión, sobre una recta del alzado indíquense las alturas A, B, C, ..., I de los puntos a representar.



Sea A' la intersección con tierra del lado transformado $\overline{M'N'}$ de la planta. Se convino en que la escala del plano geometral era aquella con la que se dibujarían los cuerpos, luego si el segmento de extremos A y, por ejemplo E, se traslada a otro perpendicular a tierra con extremo en A', su abatimiento sobre el plano del cuadro debería conservar la misma longitud h que la original. Llévese entonces E a E' mediante la traslación de vector $\vec{AA'}$. La cornisa en la vertical de A' pasa por E' y es paralela (en la realidad, no en la perspectiva) a la línea $\overline{MN}$ del suelo, luego N', E' y el punto de fuga L han de estar alineados por ser L la representación del punto del infinito de $\overline{MN}$. De ahí que N'' pueda hallarse como corte de $\overline{LE'}$ con la perpendicular a tierra por

N'. Así se trazarían todos los puntos que están a altura h. La cuestión está solventada. Sin embargo, CABRI permite la construcción de un método más sistemático y sencillo que no requiere del auxilio de puntos de fuga.

Concíbase la transformación que lleva cada punto de la perspectiva al que resultaría de proyectar su vertical a altura h. Esta transformación, en particular, aplica A' en E' y N' en N''. Es evidente que todos los puntos del horizonte serán dobles, puesto que se ven desde V en su sitio original, y que las rectas perpendiculares al horizonte también serán dobles, al obtenerse como intersección con el cuadro del plano determinado por ellas y el punto V. Se está pues ante una dilatación de eje la línea del horizonte de la que se conoce el par de puntos homólogos A' y E'. Usando la macro CABRI correspondiente a las dilataciones, cuya construcción se sugirió al lector en la sección anterior, se escribiría ahora otra macro que admita entre sus objetos iniciales el punto del segmento AI que señala la altura y que devuelva como objeto final la proyección en perspectiva de un punto en la vertical de la planta a esa altura. En la figura, para no embarrullarla, se han ocultado casi todos, salvo la cúspide V'' de uno de los tejados, colocada a la altura indicada por G en la vertical de V.

El lector puede comprobar el resultado de la simulación pinchando aquí.