



Prácticas del capítulo II.4

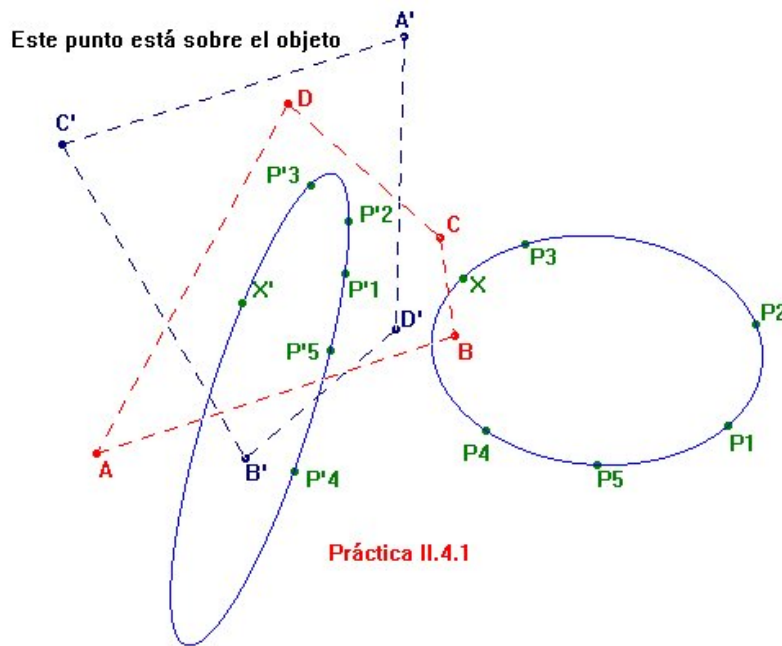
Índice

- §1 Imagen de una cónica por una proyectividad
 - §2 Proyectividades entre cónicas
 - §3 Invariancia de una cónica por una homología
 - §4 Homología entre cónicas secantes
 - §5 Puntos dobles de una proyectividad
 - §6 Puntos dobles de una involución
 - §7 Rectas dobles de una proyectividad
 - §8 Rectas dobles de una involución
 - §9 Asíntotas de una hipérbola
 - §10 Cónicas por cuatro puntos y una tangente
 - §11 Cónicas por tres puntos y dos tangentes
 - §12 Cónicas por dos puntos y tres tangentes
 - §13 Cónicas por un punto y cuatro tangentes
 - §14 Conjugado de un punto respecto de un haz
 - §15 Conjugada de una recta respecto de un haz
 - §16 La cónica de los once puntos
 - §17 El primer problema de Poncelet
 - §18 El segundo problema de Poncelet
-



Práctica II.3.4

Imagen de una cónica por una proyectividad

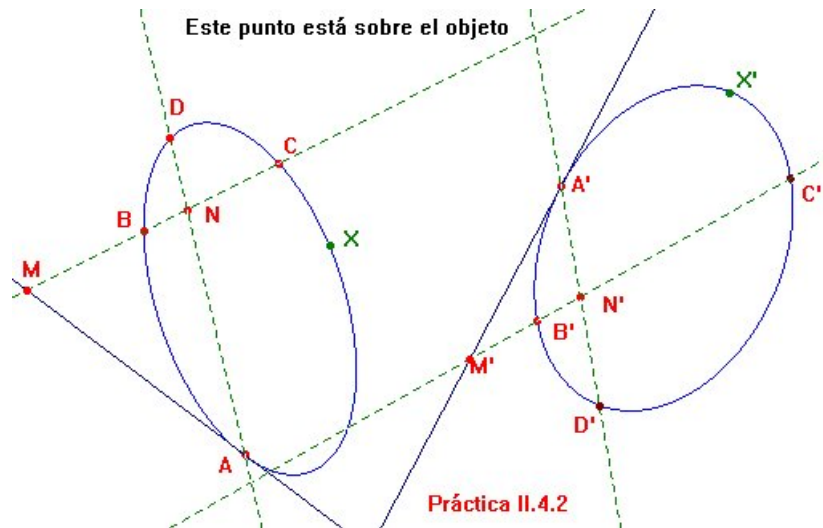


Enunciado Compruébese experimentalmente que una proyectividad del plano en sí mismo transforma una cónica en otra cónica.

Indicaciones Considérese la proyectividad σ que transforma el simplex (A, B, C, D) en el simplex (A', B', C', D') . Mediante la macro de la [práctica I.4.7](#), trácense las respectivas imágenes P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 y P'_5 de los cinco puntos P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 que definen una cónica Q . Sea Q' la *cónica* determinada por los P'_i . Ahora CABRI permite saber si la imagen X' de un punto X que se *anima* sobre Q *pertenece* a Q' .

Práctica II.4.2

Projectividades entre cónicas

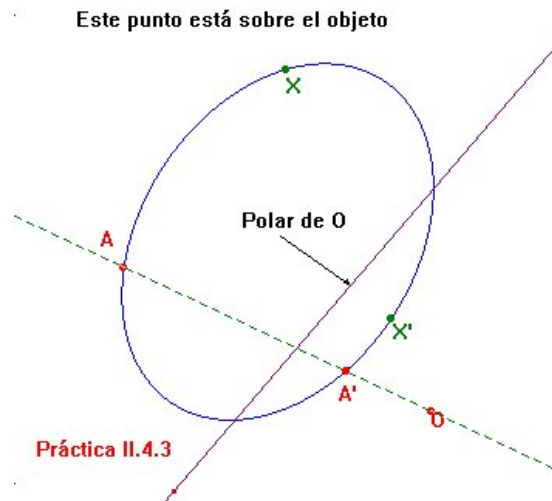


Enunciado De una projectividad $\sigma : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}'$ entre dos cónicas no degeneradas se conocen las respectivas imágenes A' , B' y C' de los puntos A , B y C . Obténgase la imagen X' de cualquier otro punto $X \in \mathcal{Q}$.

Indicaciones De acuerdo con en [teorema II.4.1](#), bastará con encontrar una projectividad de todo el plano que extienda a σ . Sea esta τ . Como τ transforma tangentes en tangentes, debe llevar $M = A^\perp \cap \overline{BC}$ a $M' = (A')^\perp \cap \overline{B'C'}$. De ahí que se pueda escoger τ de forma que aplique el símplex (A, B, C, D) en el (A', B', C', D') , con D cualquier punto fijado sobre \mathcal{Q} distinto de A , B y C , $N = \overline{AD} \cap \overline{BC}$, $D' = \overline{B'C'} \cap \overline{A'N'}$, y N' el transformado de N por la restricción de τ de dominio e imagen entre las rectas \overline{BC} y $\overline{B'C'}$, es decir, la projectividad entre rectas que aplica B en B' , C en C' y M en M' . Para resolver esta práctica solo hay entonces que cargar las macros de las prácticas I.4.2 y I.4.7.

Práctica II.4.3

Invariancia de una cónica por una homología

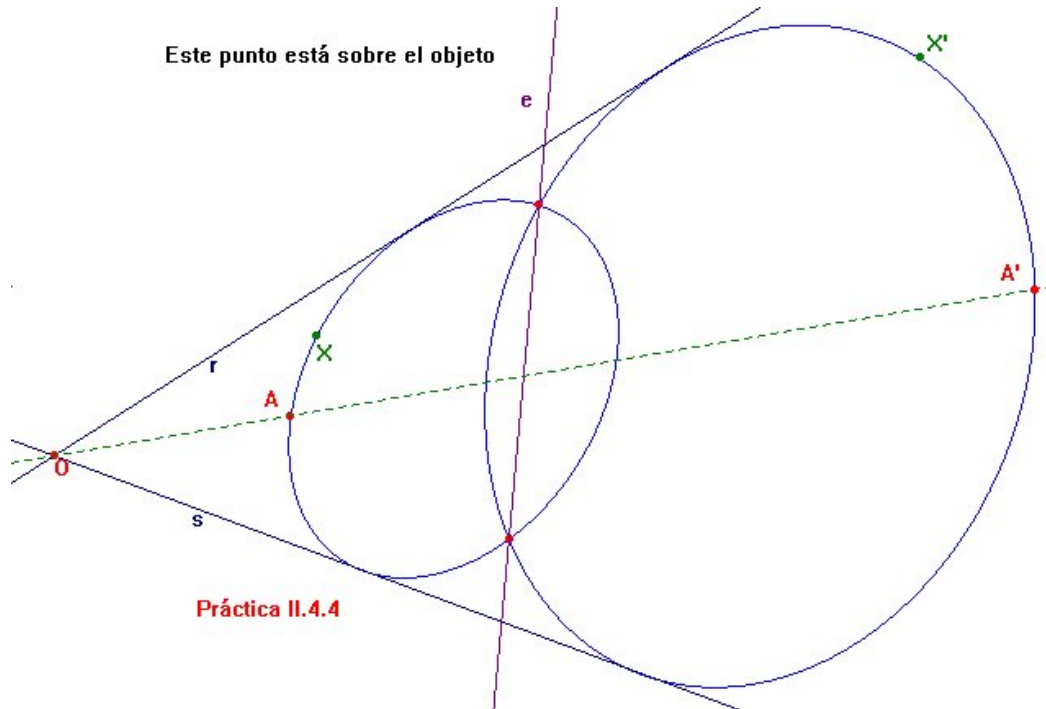


Enunciado Una recta por O corta a una cónica \mathcal{Q} en dos puntos distintos A y A' . Compruébese experimentalmente que la homología de centro O y eje O^\perp que transforma A en A' deja a la cónica invariante.

Indicaciones Úsense las macros de las prácticas I.5.1 y II.2.1.

Práctica II.4.4

Homología entre cónicas secantes

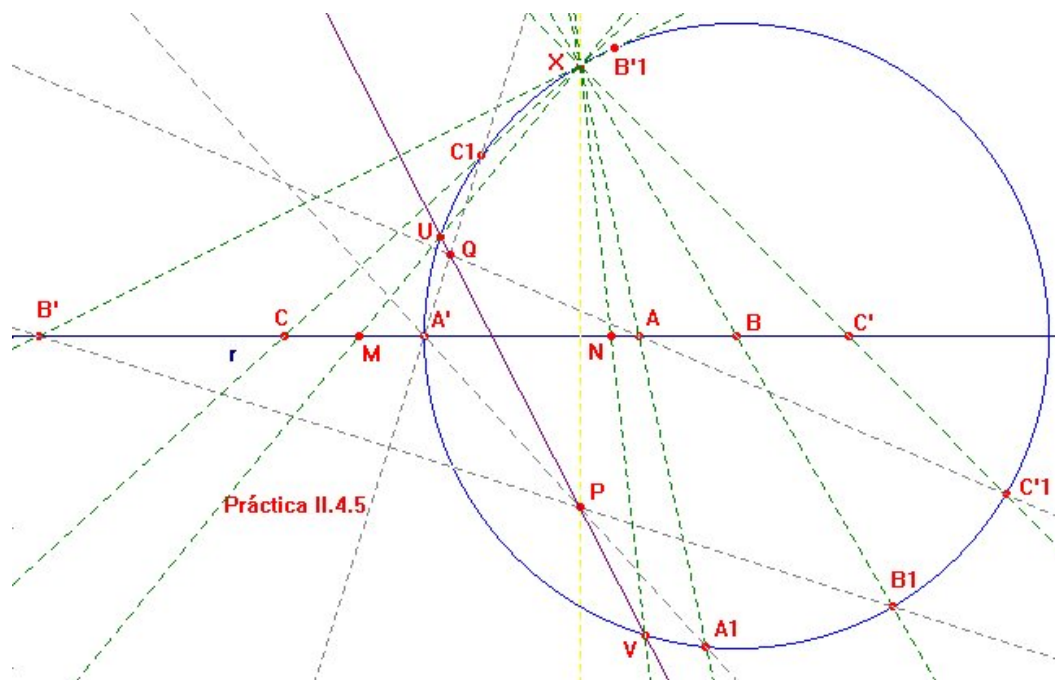


Enunciado Dos cónicas no degeneradas se cortan según un par de puntos que determinan la recta e . Encuéntrese alguna homología de eje e que transforme una cónica en la otra.

Indicaciones Un buen candidato para el centro de la homología es el punto de intersección de las tangentes comunes a las dos cónicas, pues tales rectas serían invariantes por ella. Recúrrase entonces a la macro de la [práctica II.2.14](#).

Práctica II.4.5

Puntos dobles de una proyectividad



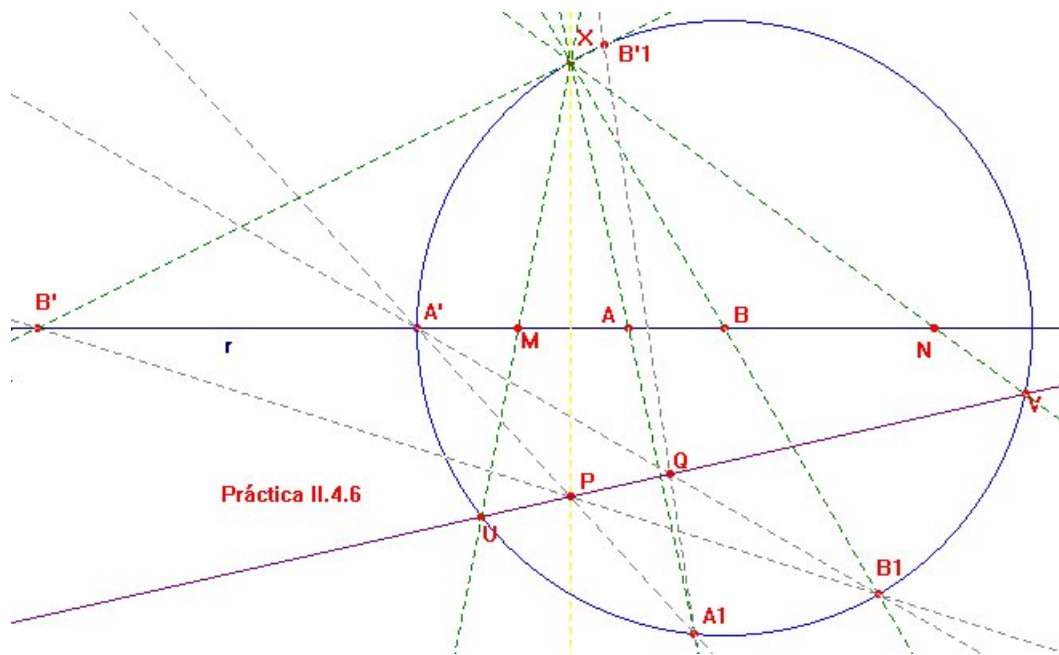
Enunciado Escribese una macro que dé los puntos dobles de una proyectividad $\sigma : r \rightarrow r$ de la que se conocen los respectivos transformados A' , B' y C' de tres puntos A , B y C de la recta r .

Indicaciones El método, ya explicado en la §sección II.4.1 de los apuntes, requiere que haya alguna cónica ya trazada, y un punto X sobre ella. La más simple para redactar una macro CABRI es la *circunferencia*. Luego se trata, a fin de minimizar los *objetos iniciales* de la macro, de escoger de modo automático alguna circunferencia relacionada con los datos. En la figura, por ejemplo, se ha tomado la centrada en B que pasa por A' , y como punto X una de sus intersecciones con la mediatriz del segmento determinado por B y A' .

El resto del proceso ya fue descrito con detalle en su momento.

Práctica II.4.6

Puntos dobles de una involución

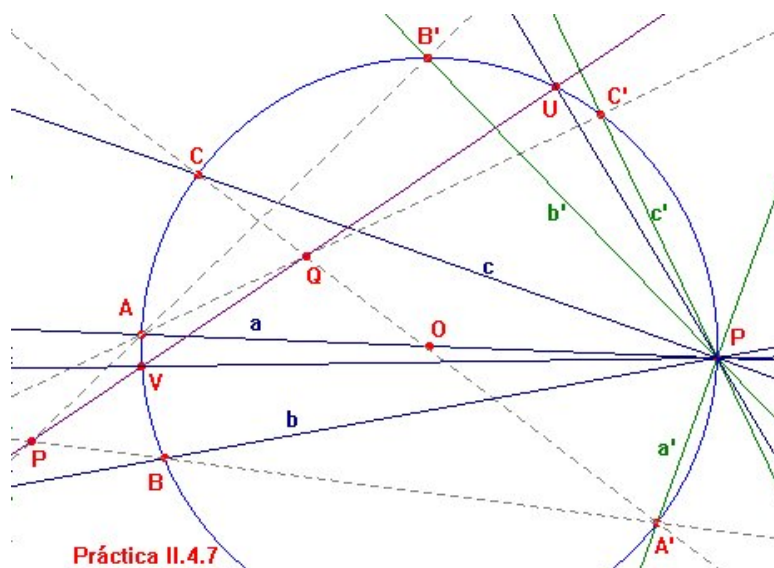


Enunciado Escribese una macro que dé los puntos dobles de una involución $\sigma : r \rightarrow r$ de la que se conocen los respectivos transformados A' y B' de dos puntos A y B de la recta r .

Indicaciones Tras lo dicho en la práctica anterior, no se precisan indicaciones.

Práctica II.4.7

Rectas dobles de una proyectividad



Enunciado Redáctese una macro que trace las rectas dobles de la proyectividad $\sigma : P^* \rightarrow P^*$ que transforma la recta a en la a' , la b en la b' y la c en la c' .

Indicaciones Como se anunció en los apuntes, una posibilidad de abordar este problema es realizando el proceso dual al descrito en la [práctica II.4.5](#). No obstante, también hay un método directo. Si se considera una cónica \mathcal{Q} no degenerada que pase por P y, en ella, los puntos $A = (a \cap \mathcal{Q}) - \{P\}$, $A' = (a' \cap \mathcal{Q}) - \{P\}$, $B = (b \cap \mathcal{Q}) - \{P\}$, $B' = (b' \cap \mathcal{Q}) - \{P\}$, $C = (c \cap \mathcal{Q}) - \{P\}$ y $C' = (c' \cap \mathcal{Q}) - \{P\}$, entonces σ inducirá otra proyectividad en \mathcal{Q} que aplica A en A' , B en B' , y C en C' . Los puntos dobles de esta última proyectividad vienen dados por las intersecciones (0, 1 ó 2) del eje de Steiner con \mathcal{Q} . Si estas son, por ejemplo, U y V , entonces las rectas dobles de σ no son otras que \overline{PU} y \overline{PV} .

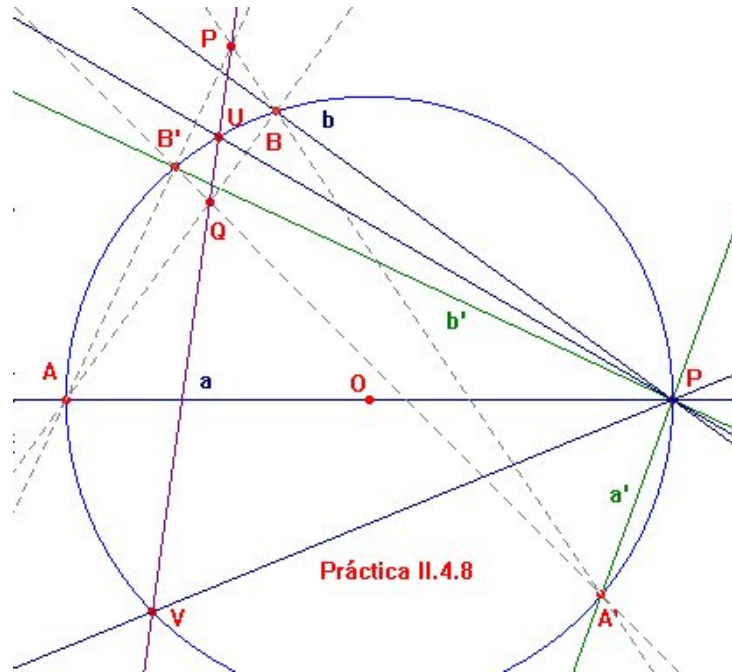
Para minimizar los *objetos iniciales* de la macro, se aconseja tomar para

Cuaderno de prácticas

Q una circunferencia que se trace en función de los datos. En la figura se ha escogido una centrada en la recta a y pasando por P .

Práctica II.4.8

Rectas dobles de una involución

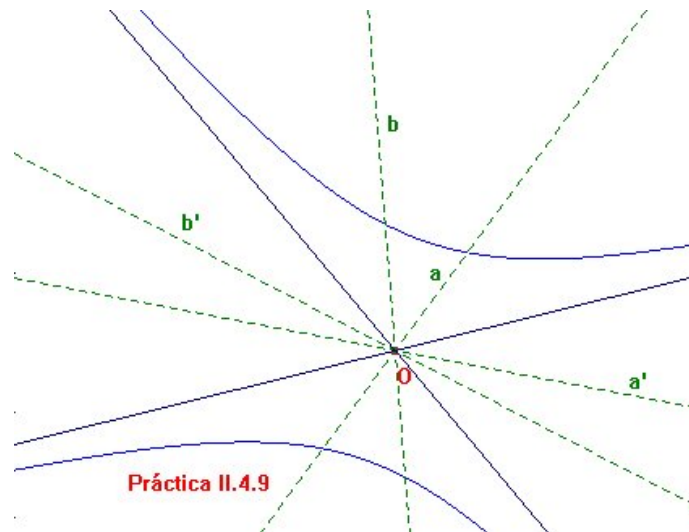


Enunciado Redáctese una macro que trace las rectas dobles de una involución $\sigma : P^* \rightarrow P^*$, conocidas las respectivas transformadas a' y b' de dos rectas a y b del haz P^* .

Indicaciones Si se ha realizado la práctica precedente, no se precisan indicaciones.

Práctica II.4.9

Asíntotas de una hipérbola

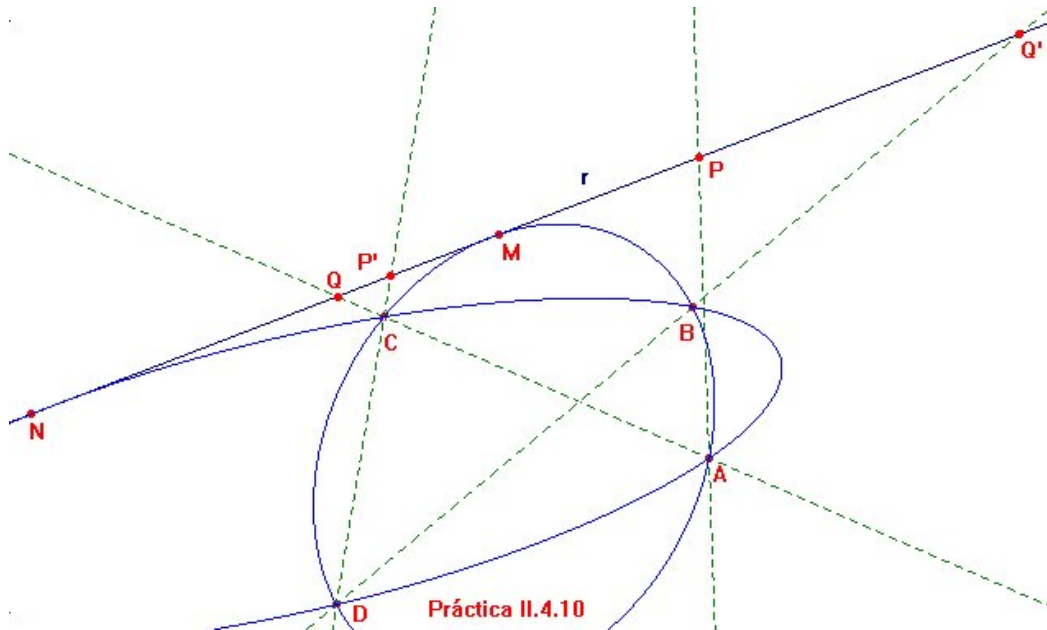


Enunciado Trácese las asíntotas de una hipérbola dada.

Indicaciones Consúltese el [ejercicio II.4.3](#) y recúrrase a las macros de las prácticas [II.3.1](#) y [II.3.2](#).

Práctica II.4.10

Cónica por cuatro puntos y una tangente



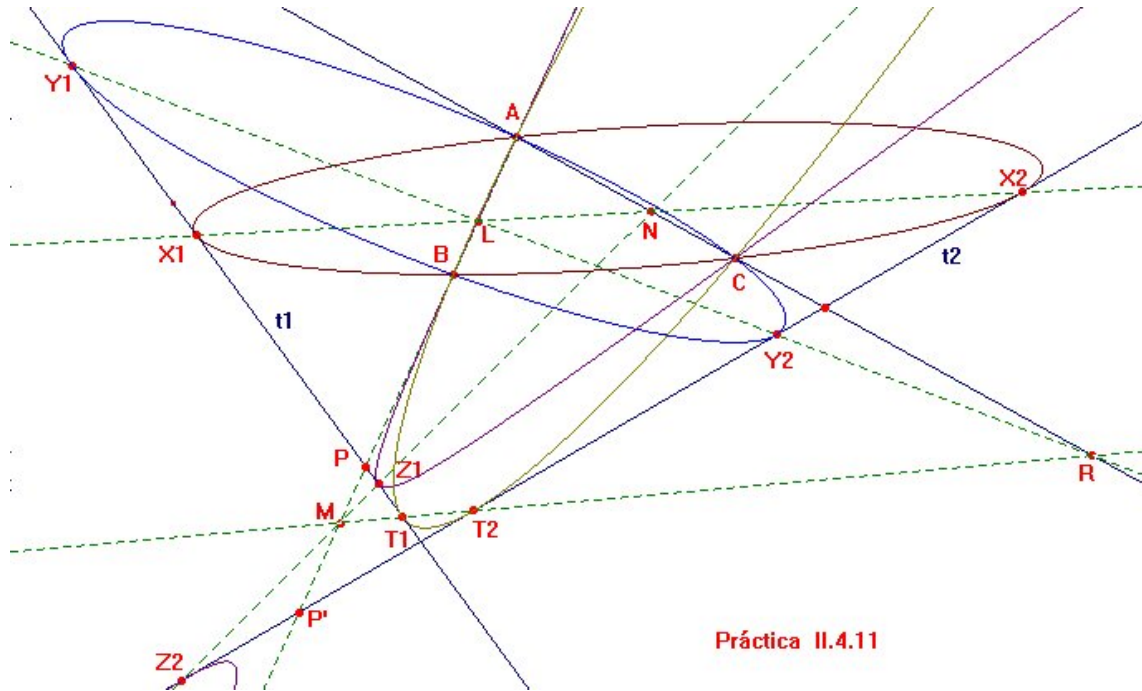
Enunciado Escribese una macro que trace las posibles cónicas que contienen a los vértices de un simplex (A, B, C, D) y son tangentes a una recta r que no pasa por ellos.

Indicaciones Considérese el haz de cónicas del tipo I determinado por el simplex (A, B, C, D) . Según el teorema de Desargues-Sturm (teorema II.4.7), este haz induce una involución σ en r tal que $r \cap \mathcal{Q} = \{X, \sigma(X)\}$, para cada $X \in r$, donde \mathcal{Q} es la única cónica del haz que pasa por X . De ahí que los puntos de tangencia de las cónicas buscadas sean los puntos dobles de σ .

El problema es ahora sencillo. No hay más que usar la macro de la práctica II.4.6, y recordar que dos de las cónicas del haz son las que degeneran en $\overline{AB} \cup \overline{CD}$ y $\overline{AC} \cup \overline{BD}$.

Práctica II.4.11

Cónicas por tres puntos y dos tangentes

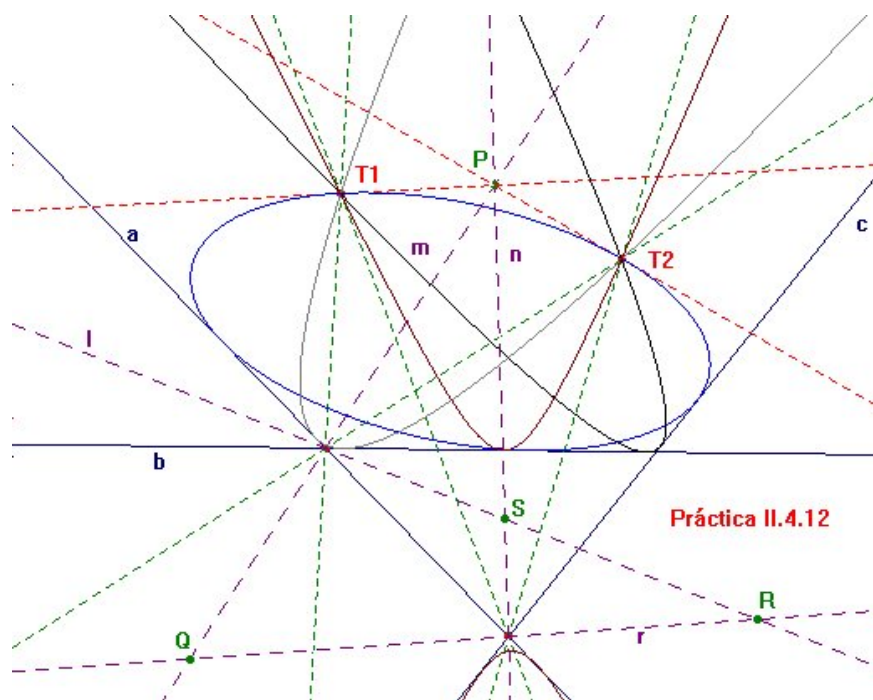


Enunciado Escribese una macro que trace las posibles cónicas (0, 1, 2, 3 ó 4) que pasan por 3 puntos no alineados A , B y C y son tangentes a dos rectas distintas t_1 y t_2 que no los contienen.

Indicaciones El método para resolver este problema ya ha sido comentado en los apuntes al final de la [§sección II.4.3](#).

Práctica II.2.12

Cónica por dos puntos y tres tangentes



Enunciado Trácese las posibles cónicas que pasan por dos puntos T_1 y T_2 y son tangentes a tres rectas no concurrentes a , b y c , con $T_1, T_2 \notin a \cup b \cup c$.

Indicaciones No es casualidad que se hayan denotado los elementos que aquí intervienen con las mismas letras que los de la práctica anterior, pero intercambiando las mayúsculas por las minúsculas. Y es que el método que aquí se ha escogido es justo el dual del que se utilizara allí. Así, si se considera la involución σ del haz de rectas que pasan por $a \cap b$ en sí mismo que aplica, a en b , y $\overline{(a \cap b)T_1}$ en $\overline{(a \cap b)T_2}$, sus rectas dobles l y m se corresponderán con los objetos duales de los puntos L y M hallados entonces. Realizando lo propio con el haz de rectas que pasan por $a \cap c$, se construyen nuevas rectas m y n , que dan lugar a los puntos $P = m \cap n$, $Q = m \cap r$, $R = l \cap r$ y $S = l \cap n$. Una de las 4 posibles cónicas, por ejemplo, será la tangente a a , b ,

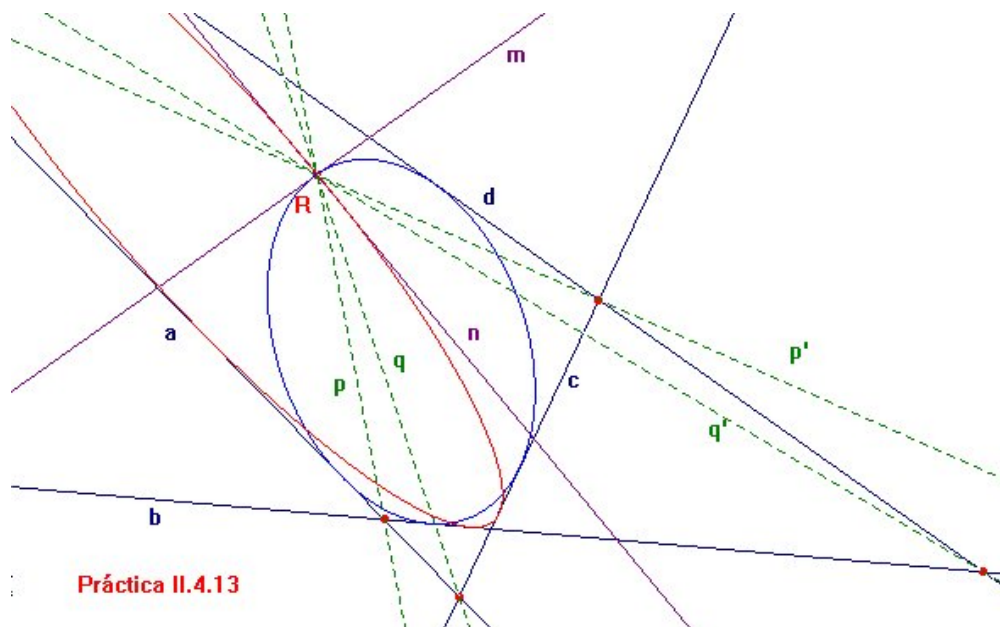
Cuaderno de prácticas

c , $\overline{T_1P}$ y $\overline{T_2P}$, la cual puede ser trazada ahora de varias maneras. Por decir una, recúrrase a la macro de la [práctica II.2.11](#).

En la figura se ha visualizado el caso de 4 soluciones, cada una en un color distinto para que sean distinguidas con facilidad.

Práctica II.4.13

Cónicas por un punto y cuatro tangentes

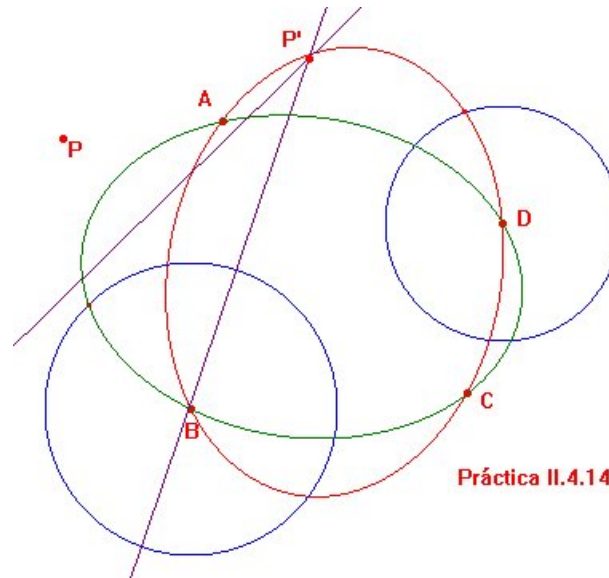


Enunciado Escribese una macro que trace las posibles cónicas que son tangentes a las 4 rectas a , b , c y d de un cuadrilátero, y que pasen por un punto R no perteneciente a ninguno de sus lados.

Indicaciones Sígase el proceso dual al descrito en la práctica II.4.10.

Práctica II.4.14

Conjugado de un punto respecto de un haz

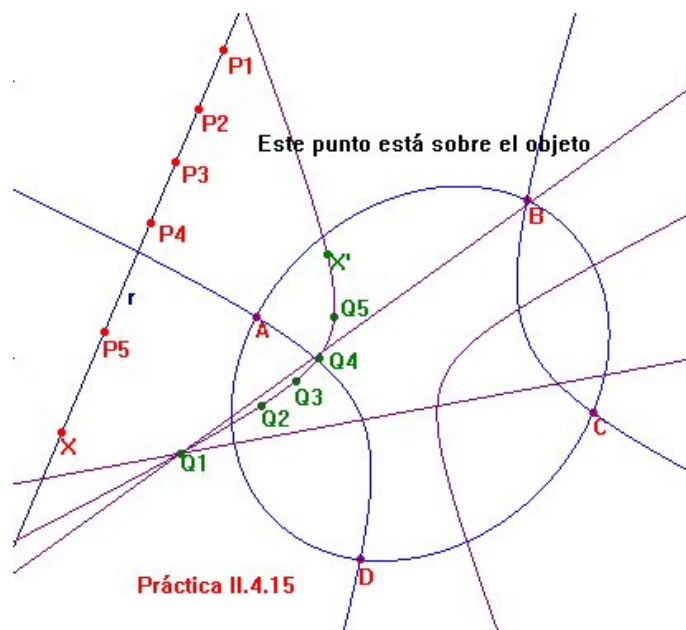


Enunciado Es bien sabido (ejercicio II.4.10) que para todo punto P del plano existe un único P' conjugado de P respecto de todas las cónicas de un haz no degenerado. Escribese una macro que trace ese punto P' , cuyos *objetos iniciales* sean P y los cuatro puntos base A , B , C y D de un haz del tipo I.

Indicaciones El punto P' ha de pertenecer a todas las polares de P respecto de las cónicas del haz. De ahí con que baste mecanizar algún proceso de elección de dos de las cónicas del haz para recurrir después a la macro de la práctica II.2.1.

Práctica II.4.15

Conjugada de una recta respecto de un haz



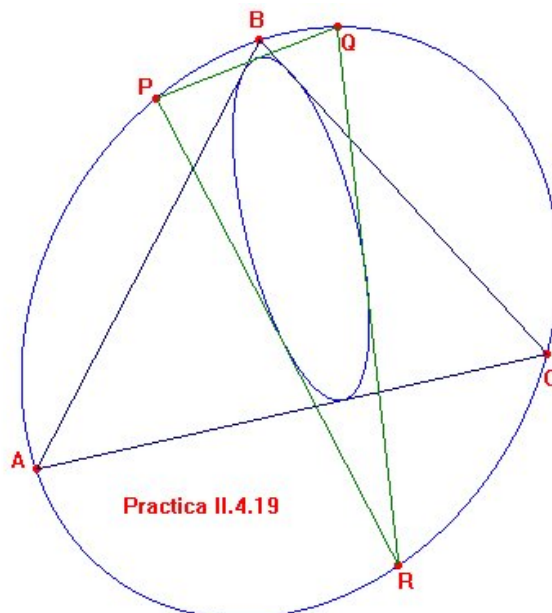
Enunciado En el ejercicio II.4.11 se pedía demostrar que la aplicación σ que lleva cada punto X a su conjugado X' respecto de todas las cónicas de un haz del tipo I transforma rectas en cónicas. Escribese una macro que trace esta cónica dados una recta r y un haz determinado por un simplex (A, B, C, D) , y compruébese experimentalmente que $\sigma(r)$ es una cónica.

Indicaciones Para trazar la cónica pedida, son precisos 5 puntos. Mecanícese pues de alguna forma la elección de P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 sobre r , y hállese sus respectivos conjugados respecto del haz por medio de la macro de la práctica anterior. Una idea puede ser tomar $P_1 = \overline{AD} \cap r$, $P_5 = \overline{AB} \cap r$ e intercalar entre ellos los demás a base de *puntos medios*.

Para la comprobación empírica del ejercicio II.4.11, *ánimese* otro punto X sobre r y corrobórese que su conjugado X' respecto del haz *pertenece* a la cónica determinada por los $Q_i = \sigma(P_i)$.

Práctica II.4.17

El primer problema de Poncelet



Enunciado Dados una cónica \mathcal{Q} y tres puntos P , Q y R sobre ella, trácense los posibles triángulos inscritos en \mathcal{Q} tales que cada uno de sus lados pase exactamente por uno de los tres primeros puntos.

Indicaciones Escójase un punto A sobre la cónica. La homología de centro P y eje P^\perp deja a \mathcal{Q} invariante y transforma A en la otra intersección A_1 de \overline{PA} con la cónica. La homología de centro Q y eje Q^\perp lleva A_1 a A_2 , con $\mathcal{Q} \cap \overline{QA_2} = \{A_1, A_2\}$. Por último, la homología de centro R y eje R^\perp aplicaría A_2 en el otro punto A' en que la cónica corta a $\overline{RA_2}$. Si $A' = A$, entonces (A, A_1, A_2) es uno de los triángulos buscados. En otro caso, la aplicación $\sigma : A \mapsto A'$ es una proyectividad de la cónica en sí misma pues resulta de componer tres proyectividades. Conviene definir una macro provisional que dé la imagen $X' = \sigma(X)$ de cualquier otro punto $X \in \mathcal{Q}$. Si $\sigma \neq 1_{\mathcal{Q}}$, dependiendo del número de puntos dobles de σ el primer problema

Cuaderno de prácticas

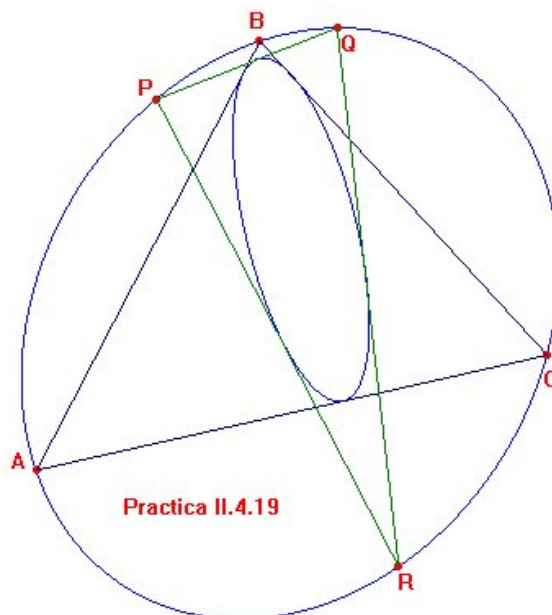
de Poncelet tendrá 0, 1 ó 2 soluciones.

Ahora bastará con tomar otros dos puntos B y C en la cónica y hallar el eje de Steiner e de σ .

En la figura se ilustra el caso de dos soluciones, aunque solo se ha resaltado una de ellas, la (L, M, N) , con L una de las dos intersecciones del eje de Steiner con \mathcal{Q} .

Práctica II.4.18

El segundo problema de Poncelet



Enunciado Dadas dos cónicas \mathcal{Q} y \mathcal{Q}' , el segundo problema de Poncelet estudia las circunstancias bajo las que puede inscribirse un polígono de n lados en la primera de ellas, tal que esté circunscrito en la segunda. Aunque no será probado aquí, sepa el lector que en caso de existir alguna solución, cada punto P de la primera cónica da lugar a nuevas soluciones sin más que ir trazando una sucesión de puntos sobre \mathcal{Q} , cada uno de los cuales no es sino la intersección con \mathcal{Q} de una de las tangentes del punto anterior a la cónica \mathcal{Q}' .

En esta práctica se propone comprobar experimentalmente este hecho para el caso de los triángulos ($n = 3$).

Indicaciones Con la ayuda de las macros redactadas con anterioridad, constrúyase una solución particular al segundo problema de Poncelet, esto es, dos cónicas \mathcal{Q} y \mathcal{Q}' más un triángulo (A, B, C) con sus vértices en \mathcal{Q} y sus

Cuaderno de prácticas

lados tangentes a \mathcal{Q}' . Situado un punto P en la primera cónica, sean Q y R las intersecciones con \mathcal{Q} de las tangentes a \mathcal{Q}' por P . Compruébese ahora que \overline{QR} es tangente a \mathcal{Q}' .

Si se *anima* P sobre \mathcal{Q} , se visualizarán la totalidad de las soluciones al segundo problema de Poncelet. Obsérvese que, en ocasiones, puede que el triángulo (P, Q, R) degenerare al superponerse dos de sus vértices.

