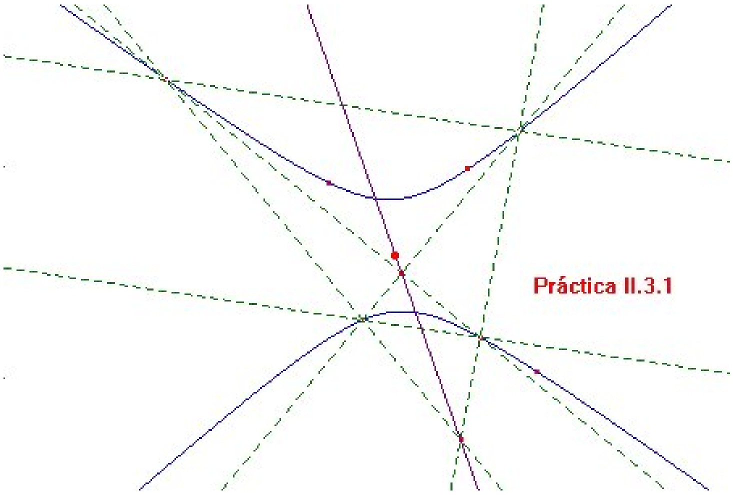
Prácticas del capítulo II.3

Índice

Práctica II.3.1

Centro de una cónica



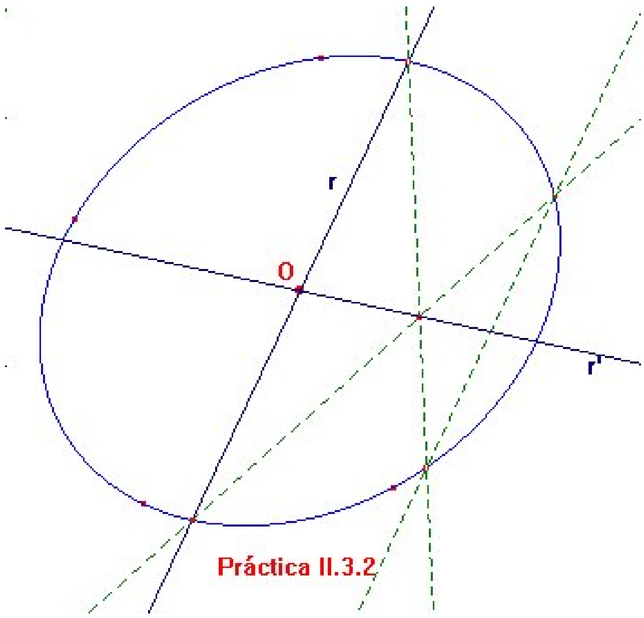
Enunciado Escríbase una macro que dé el centro de una cónica (si lo tiene).

Indicaciones El centro de una cónica, si existe, es el punto donde concurren todos los diámetros. Bastará entonces con trazar dos diámetros, lo cual debería serle fácil al lector una vez que haya resuelto el ejercicio II.3.2.

Para que la macro tenga a la cónica como único objeto inicial, aprovéchense los puntos de definición de la misma como vértices de los trapecios inscritos en ella necesarios.

Práctica II.3.2

Diámetro conjugado

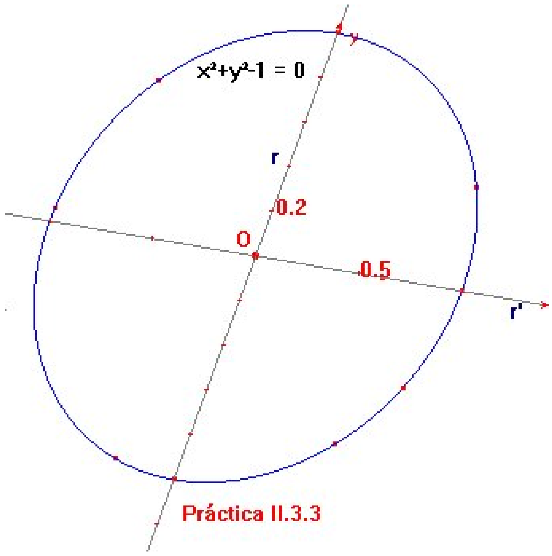


Enunciado Redáctese una macro que trace el diámetro conjugado r' de cualquier diámetro r de una cónica con centro.

Indicaciones Si s es una recta secante a la cónica $\mathcal{C}$ y paralela al diámetro r, entonces los puntos de intersección A y B de s con $\mathcal{C}$ son conjugados armónicos respecto del par (M, Q), con $M = \frac{A+B}{2}$ y Q el punto impropio de s, que es el mismo que el de r. De ahí que $M \in Q^{\perp}$.

Práctica II.3.3

Ecuación de una cónica con centro referida a sus ejes



Enunciado Compruébese experimentalmente que la ecuación de una cónica con centro referida a sus ejes adquiere la forma

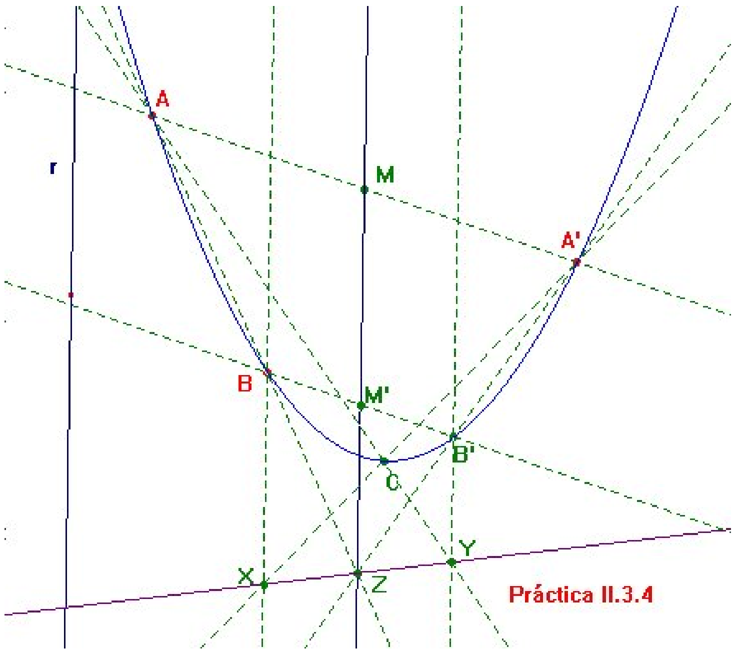
$$\lambda_0 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0.$$

Indicaciones Usando las macros de las prácticas II.3.1 y II.3.2, trácense un par de diámetros conjugados r y r' de la cónica. Ajústense a ellos los *Nuevos ejes* que CABRI permite crear. Ahora la herramienta *Ecuación y coordenadas* dará la ecuación reducida de la cónica en el nuevo sistema de coordenadas.

Adviértase que si en el caso de la elipse se toman sus vértices (puntos de intersección de la cónica con los ejes) como nuevas unidades de medida, la ecuación resulta $x^2 + y^2 = 1$, dejando bien patente que la geometría afín no distingue ninguna diferencia entre elipses más o menos excéntricas y la circunferencia euclídea. Conceptos como semiejes, focos, excentricidad, recta directriz etcétera no son competencia de la geometría afín.

Práctica II.3.4

Parábola por tres puntos y eje



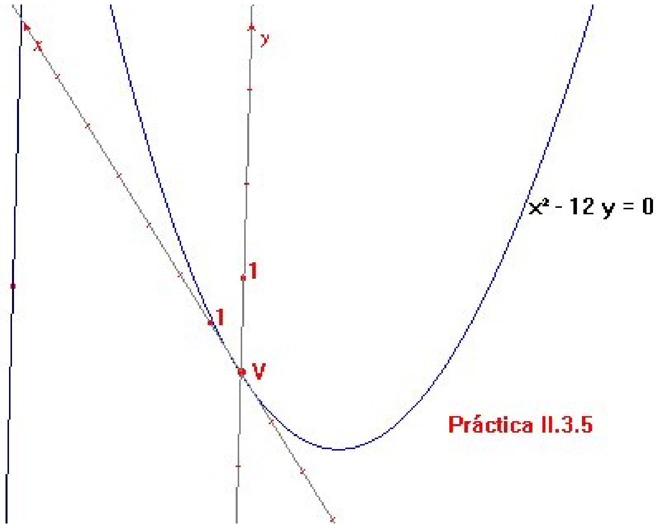
Enunciado Trácese una parábola de la que se conocen tres puntos A, B y A' y el eje (de simetría) r.

Indicaciones Al lector, acostumbrado hasta aquí a determinar una cónica a partir de 5 datos, tal vez le parezca insuficiente la información suministrada. Sin embargo no es así pues, sabiendo que se trata de una parábola de la que se da el eje (de simetría), en realidad se conoce una recta tangente (la impropia) y su punto de tangencia (el punto del infinito de r).

De nuevo sería útil haber resuelto antes el ejercicio II.3.2, lo que permitirá construir el cuarto vértice B' de un trapecio (A, B, A', B') inscrito en la parábola. Ahora se dispone de cinco puntos sobre la cónica, los cuatro del afín más el impropio de r. Sin embargo, la herramienta *Cónica* de CABRI requiere que los cinco sean accesibles. Puede adaptarse no obstante cualquiera de los procedimientos vistos en las prácticas del capítulo anterior para obtener un punto adicional. Por ejemplo, en la figura se ha utilizado el recíproco del teorema de Pascal (teorema II.2.10), para la construcción de un quinto punto afín C.

Práctica II.3.5

Ecuación de una parábola referida a sus ejes



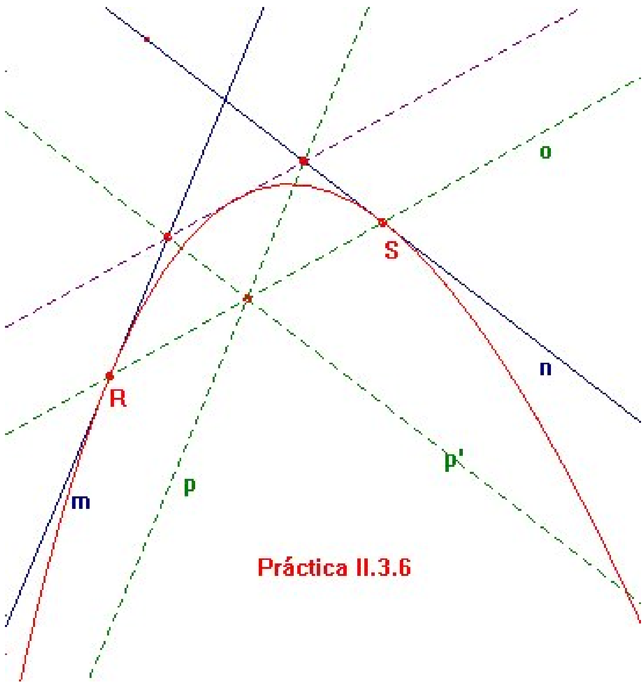
Enunciado Compruébese experimentalmente que la ecuación de una parábola referida a sus ejes adquiere alguna de las formas

$$\lambda x + \mu y^2 = 0, \quad \text{o} \quad \lambda y + \mu x^2 = 0.$$

Indicaciones Comiéncese trazando alguna parábola $\mathcal{C}$ con la ayuda de la práctica anterior, y elíjase un punto V de ella que haga de vértice. Uno de los ejes (el de simetría) será la paralela a r por V. El otro debe ser la tangente a $\mathcal{C}$ en V (recuérdese el ejercicio II.3.3). Recúrrase a la macro de la práctica II.2.3 para el trazado de tal tangente. Y ahora procédase como se indicó en la práctica II.3.3.

Práctica II.3.6

Parábola por dos tangentes en sendos puntos

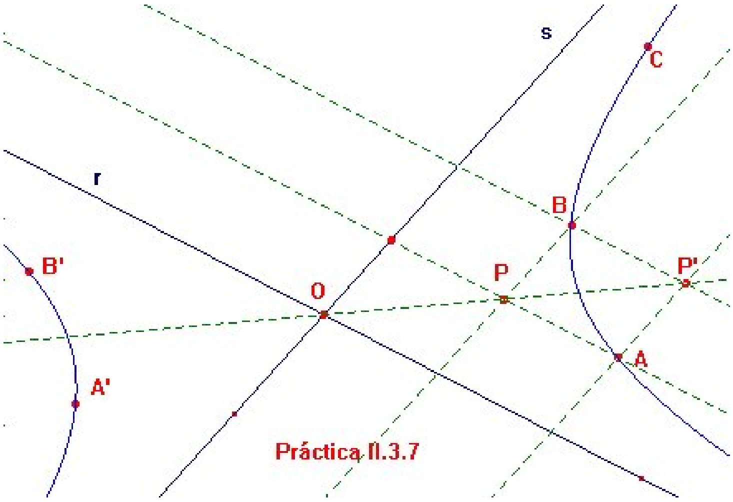


Enunciado Trácese una parábola de la que se conocen las tangentes m y n en los respectivos puntos R y S.

Indicaciones Obsérvese que aquí también se dispone de 5 datos, las tangentes m y n, los puntos de tangencia R y S, más una tangente más, a saber, la recta impropia, ya que se trata de una parábola. La cónica proyectiva extensión de la parábola se encuentra entonces en la situación dual de la propuesta en la práctica II.2.12. Solo precisa dualizar aquella construcción para obtener una tangente más por cada paralela p a la recta m. El lector puede optar ahora por trazar la parábola por envolventes como un *Lugar geométrico*, o bien obtener un total de cinco tangentes y aplicar la macro de la práctica II.2.11.

Práctica II.3.7

Hipérbola por punto y dos asíntotas

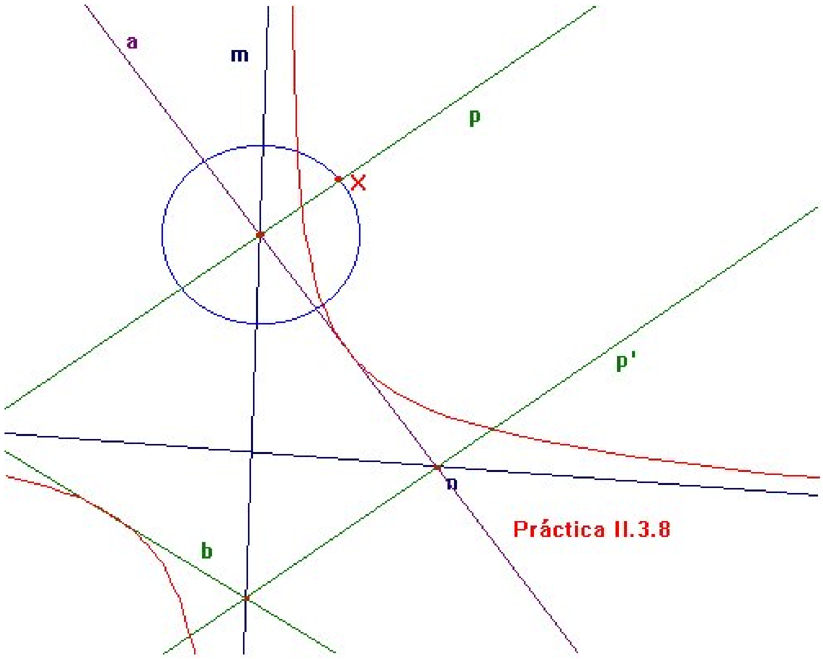


Enunciado Redáctese una macro que trace una hipérbola de la que se dan un punto A y las dos asíntotas r y s.

Indicaciones Basta adecuar el método seguido en la práctica II.2.12 considerando los puntos de tangencia M y N de las asíntotas en el infinito.

Práctica II.3.8

Hipérbola conocidas las asíntotas y una tangente

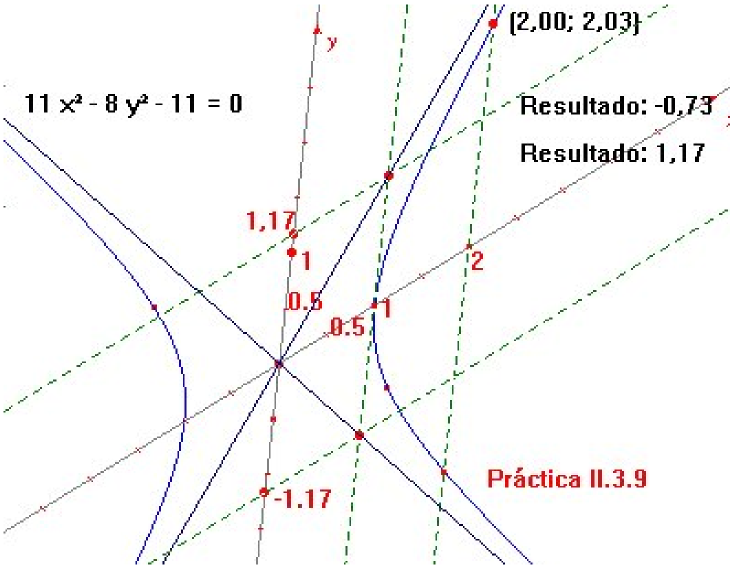


Enunciado Trácese una hipérbola de la que se conocen sus asíntotas m y n más una tangente a.

Indicaciones Inspírese el lector en las prácticas II.3.6 y II.3.7.

Práctica II.3.9

Asíntotas de una hipérbola



Enunciado De una hipérbola dada, trácense sus asíntotas. (Se permite recurrir a técnicas de geometría analítica.)

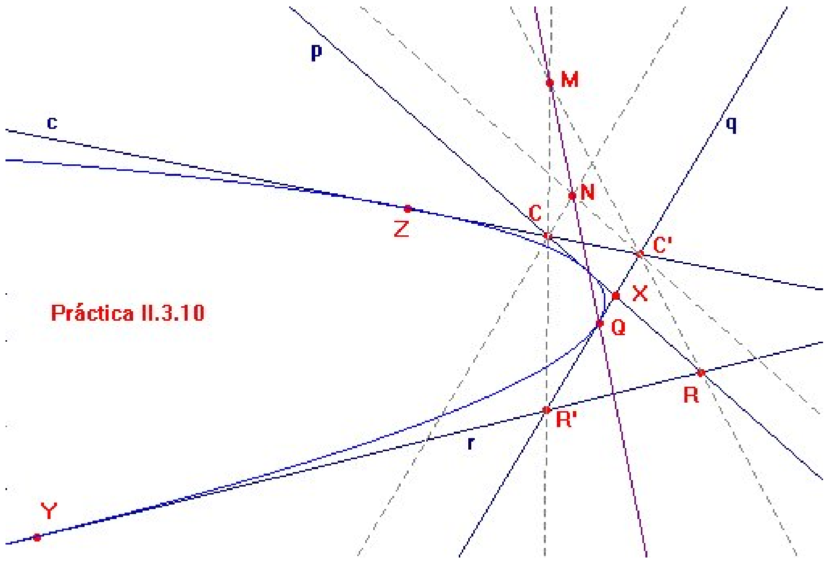
Indicaciones En las prácticas del capítulo siguiente se verá cómo resolver este problema usando solo geometría sintética. Sin embargo, con los conocimientos adquiridos hasta ahora se precisa descender a las coordenadas para abordar la cuestión. Una buena idea es aprovechar que la ecuación reducida de toda hipérbola toma la forma

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \gamma = 0, \quad \text{con} \quad \lambda\mu < 0.$$

Recúrrase pues a la práctica II.3.3 para referir la ecuación a unos ejes (pareja de diámetros conjugados). Por desgracia, la herramienta *Ecuación y coordenadas* no proporciona una salida utilizable por la *Calculadora* como dato. De ahí que en la figura se haya calculado la ordenada de un punto de la hipérbola de abscisa 2. Tal información debería bastarle al lector para trazar las asíntotas.

Práctica II.3.10

Parábola conocidas cuatro tangentes

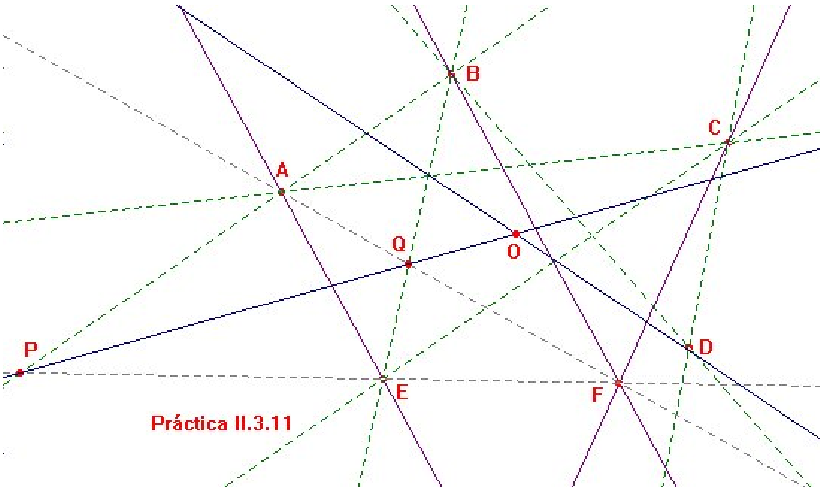


Enunciado Escríbase una macro que trace la parábola de la que se den cuatro tangentes.

Indicaciones Sean c, p, q y r las cuatro tangentes dadas. Llámese b a la recta del infinito y adáptese el método de la práctica II.2.11 para hallar puntos de tangencia accesibles en el afín, y así recurrir a alguna de las macros de prácticas anteriores. En la figura de arriba, por ejemplo, se visualiza la construcción del punto de tangencia Q, obtenido como imagen del punto $X = p \cap q$ por la proyectividad inducida por la cónica entre las tangentes p y q.

Práctica II.3.11

Centro de una cónica dados cinco puntos de ella

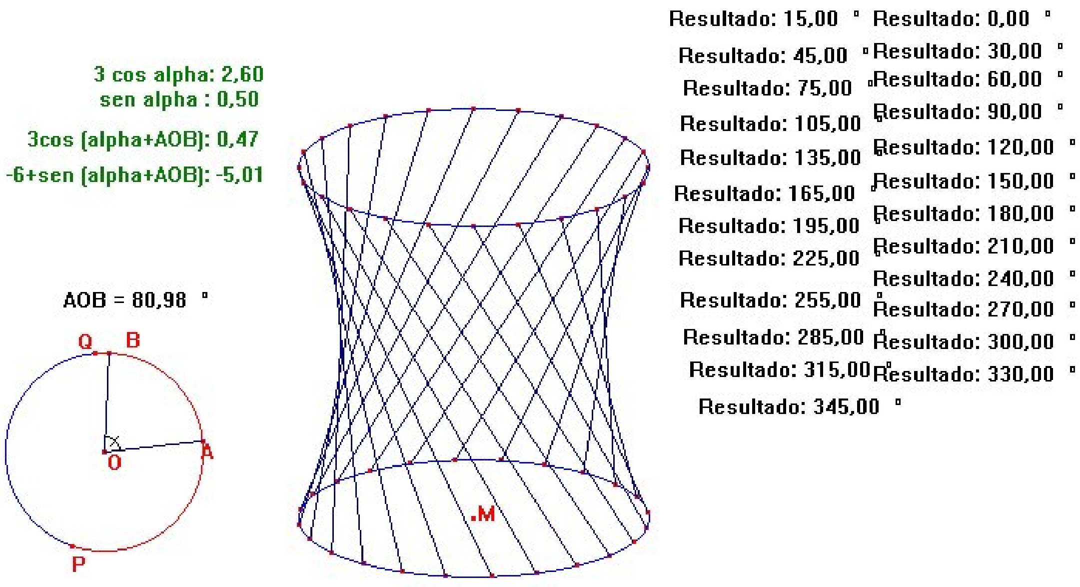


Enunciado Sin recurrir a la herramienta *Cónica*, hállese el centro de una cónica (con centro) de la que se proporcionan cinco puntos A, B, C, D y E.

Indicaciones Bastaría con trazar dos diámetros, los cuales son las diagonales de los trapecios inscritos. El que contiene, por ejemplo, a los vértices A, B y E, debe tener como cuarto vértice a la intersección con la cónica de la paralela a $\overline{AE}$ por B. Esta intersección Fpuede calcularse, usando el teorema II.2.7, por medio de la proyectividad $\sigma : B^* \to C^*$ inducida por la cónica.

Práctica II.3.12

Simulación dinámica del hiperboloide de una hoja



Práctica II.2.12

Enunciado Considérense dos aros circulares del mismo radio situados uno en la vertical del otro y unidos por tiras de goma también verticales. Manteniendo el de arriba fijo, y girando el segundo alrededor de su centro M, las gomas se apartan de la vertical, estirándose, pero siempre contenidas en un hiperboloide reglado (o de una hoja). Realícese una animación CABRI que simule semejante experiencia.

Indicaciones Los aros, vistos en perspectiva, se dibujarán como elipses. Puesto que varios puntos han de desplazarse sobre una de ellas, conviene usar la forma paramétrica de la elipse. En la figura se han representado las elipses

$$\begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ y = \operatorname{sen}\alpha \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ y = -6 + \operatorname{sen}\alpha \end{cases} .$$

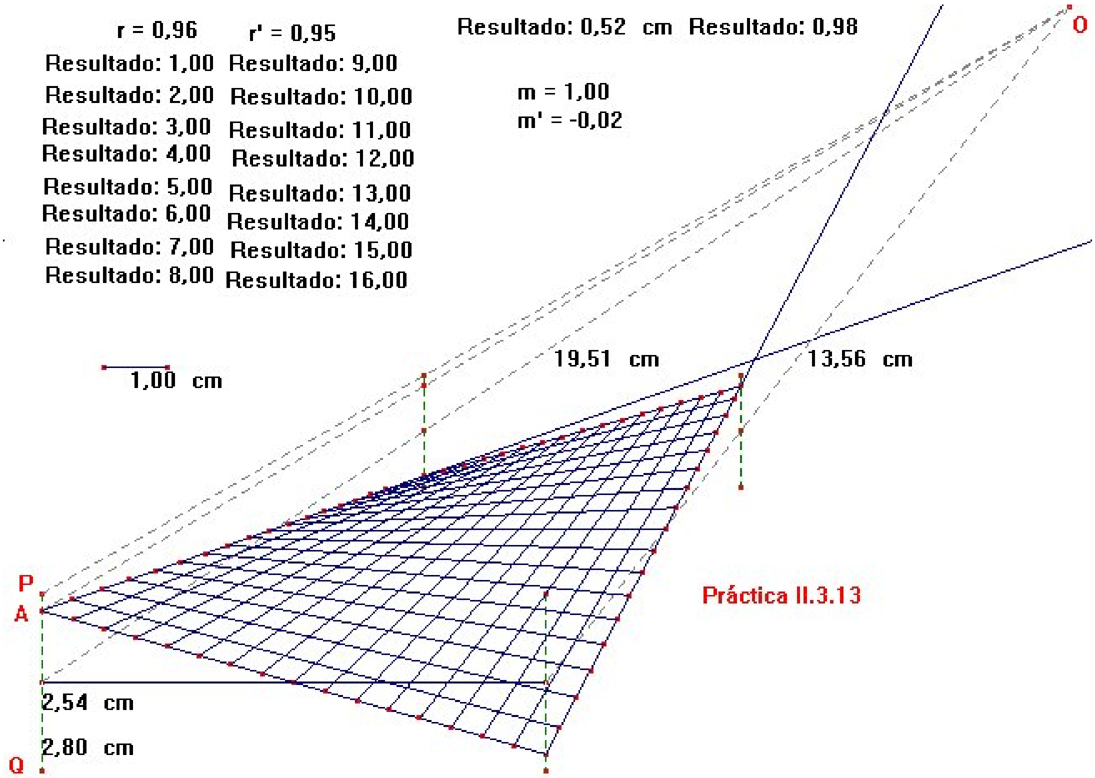
Los puntos de anclaje de arriba de las gomas se sitúan a intervalos regulares de $15°$, mientras que los de abajo responden al esquema

$$(\cos(\alpha + \angle AOB), -6 + \operatorname{sen}(\alpha + \angle AOB)),$$

donde α sigue siendo un múltiplo de $15°$, y el ángulo $\angle AOB$ está determinado por dos puntos A y B de un *Arco* PQ de la circunferencia de centro O. La simulación se consigue *animando* el punto B.

Práctica II.3.13

Simulación dinámica del paraboloide hiperbólico



Enunciado Los ingenieros suelen construir un paraboloide hiperbólico (un *PH* según su jerga), a partir de un bastidor cuadrado o rectangular al que se le han girado en sentidos contrarios dos lados opuestos. Después se lanzan segmentos rectilíneos a intervalos regulares que unan cada lado con su opuesto. Realícese una animación CABRI que simule el torcimiento de semejante bastidor.

Indicaciones Para dar impresión de perspectiva, se ha utilizado en la figura un punto de fuga O. El punto A que se *Anima* se desliza por el segmento de extremos P y Q. Los puntos de anclaje de las tirantas atadas a los lados del bastidor paralelos al observador se han calculado solo con las herramientas *Punto medio*, *Simetría axial* y *Simetría*. Sin embargo, la otra familia de rectas debe aumentar en densidad hacia el fondo para dar impresión de profundidad. A fin de no complicar en exceso los cálculos de una perspectiva real, se han interpolado en progresión geométrica de razón variable en función de la distancia entre A y Q.