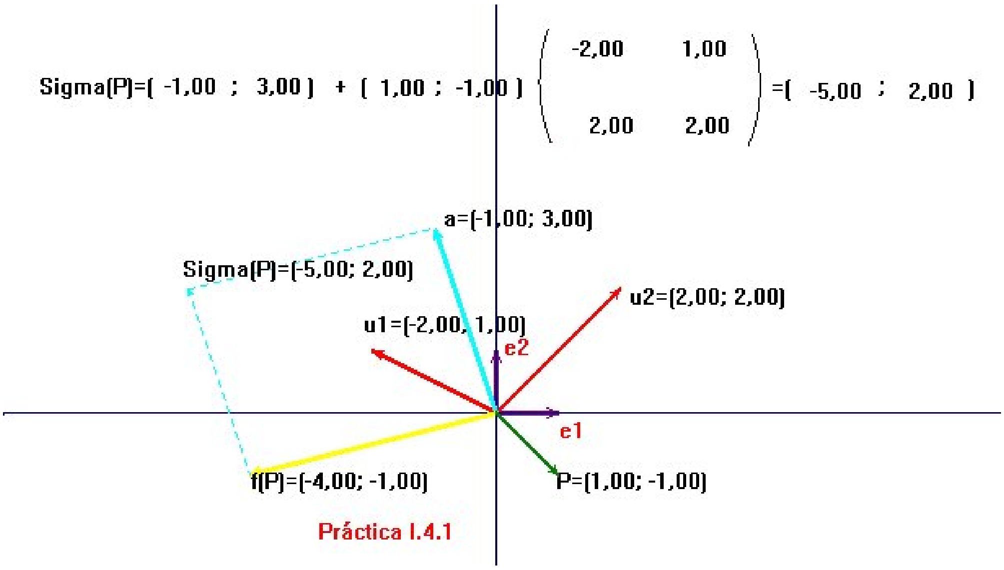
Prácticas del capítulo I.4

Índice

Práctica I.4.1

Afinidades en el plano

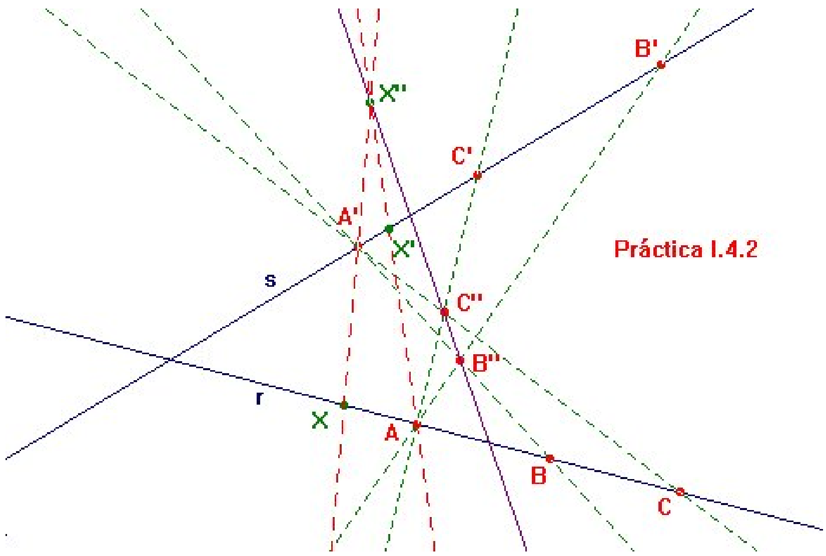


Enunciado Hállese la imagen del punto P por la afinidad $\sigma = \tau_A \circ f$, donde f es el automorfismo lineal determinado por $f(e_1) = u_1$ y $f(e_2) = u_2$, con $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Indicaciones La resolución de este ejercicio pasa por aprovechar todo lo que se hizo en la práctica I.2.4, para componer después con la traslación τ_A de vector A.

Práctica I.4.2

Proyectividades entre rectas distintas



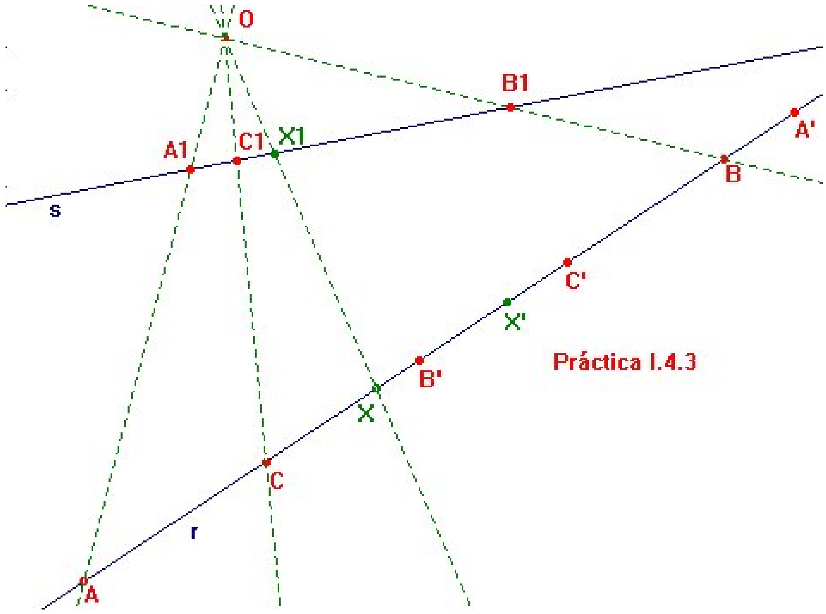
Enunciado De cierta proyectividad $\sigma : r \to s$ entre dos rectas distintas se sabe que aplica A en A', B en B' y C en C', con A, B y C tres puntos distintos de r. Escríbase una macro que porporcione la imagen $X' = \sigma(X)$ de cualquier otro punto X de r.

Indicaciones Se trata de factorizar la proyectividad σ como composición de dos perspectividades. Al objeto de que la macro requiera del mínimo número de objetos iniciales, conviene aprovechar los puntos A y A' como centros de perspectiva, lo cual podrá hacerse siempre que $r \cap s \notin \{A, A'\}$. Así, si $B'' = \overline{A'B} \cap \overline{AB'}$ y $C'' = \overline{A'C} \cap \overline{AC'}$, entonces $\sigma = \tau_A \circ \tau_{A'}$, con $\tau_{A'} : r \to \overline{B''C''}$ y $\tau_A : \overline{B''C''} \to s$ las perspectividades precisas. Ahora $X' = \overline{AX''} \cap s$, con $X'' = \overline{A'X} \cap \overline{B''C''}$.

El lector puede ratificar la eficacia de su macro comprobando que $\sigma(A) = A'$, $\sigma(B) = B'$ y $\sigma(C) = C'$.

Práctica I.4.3

Proyectividades de una recta en sí misma

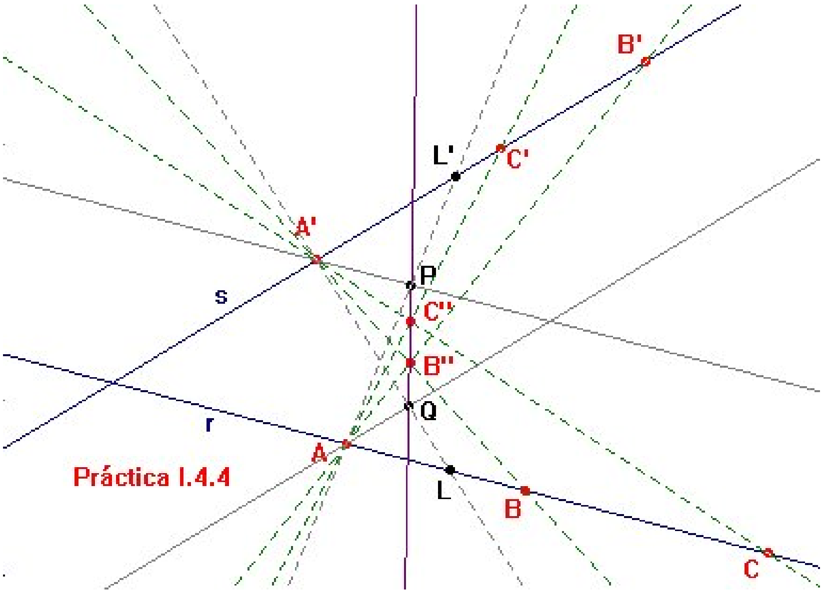


Enunciado Si se conocen las imágenes de tres puntos distintos por una proyectividad $\sigma : r \to r$, hállese la imagen de cualquier otro punto $X \in r$.

Indicaciones Ahora, como se vio en los apuntes, son precisas tres perspectividades para descomponer σ. Elíjanse una recta s distinta de r, y un punto O fuera de r y s. La perspectividad de centro O de r sobre s transformará los datos del problema A, B, C y X en los respectivos puntos A_1, B_1, C_1 y X_1 de s. Aplíquese ahora la macro de la práctica anterior para trazar $X' = \sigma(X)$.

Práctica I.4.4

Puntos límite



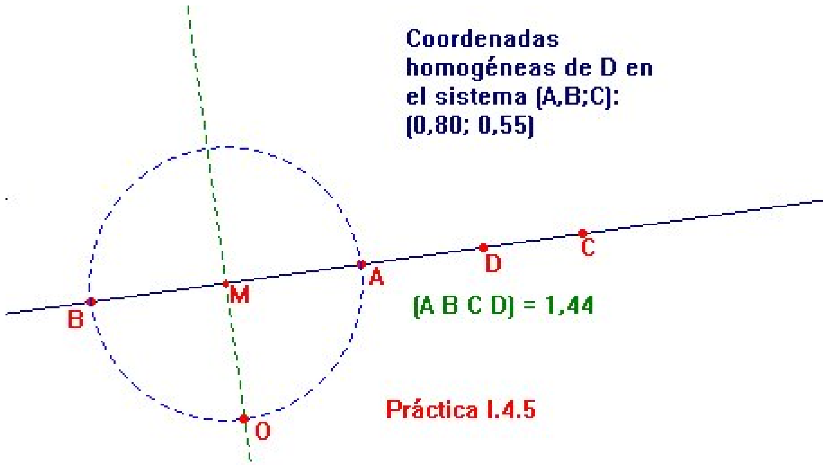
Enunciado Hállense los puntos límite de una proyectividad entre dos rectas de la que se conoce la imagen de un símplex.

Indicaciones Operando como en la práctica I.4.2, factorícese la proyectividad $\sigma : r \to s$ en la composición $\tau_A \circ \tau_{A'}$ de dos perspectividades. Ahora el punto impropio de r es el mismo que el de la paralela a r por A'. Si esta recta corta a $\overline{B''C''}$ en P, un punto límite se obtendría como $L' = s \cap \overline{AP}$.

Razonando de igual forma sobre la inversa $\sigma^{-1} = \tau_{A'} \circ \tau_A$, se hallará el punto L de r que se transforma en el del infinito de s.

Práctica I.4.5

Razón doble de cuatro puntos alineados



Enunciado Escríbase una macro que calcule razón doble $(ABCD)$ de cuatro puntos sobre una recta r.

Indicaciones Una manera sencilla de resolver este ejercicio es recurriendo a la macro que se construyó en la práctica I.3.2. En efecto, si se conocieran las coordenadas homogéneas (μ_0, μ_1) del punto D en el sistema $\{A, B; C\}$, la fórmula (1) del capítulo I.4 da

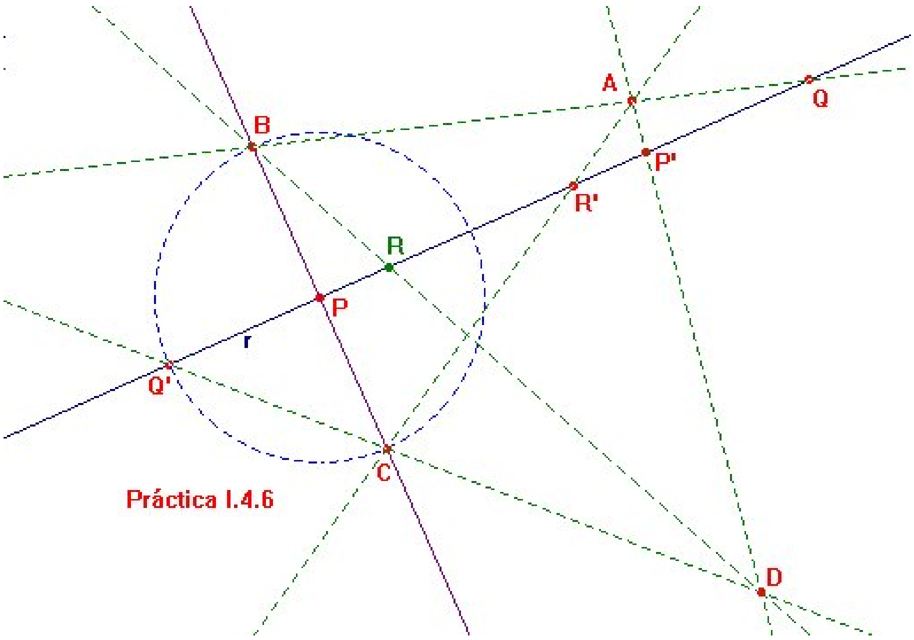
$$(ABCD) = \frac{\mu_0}{\mu_1},$$

ya que $(1, 1)$ son las coordenadas homogéneas de C, que hace de punto unidad.

Eso sí, aquella macro requería de un punto O que funcionase como origen. Cuestiones de elegancia, y también de sencillez, deben inclinar al usuario de CABRI a eliminar los objetos iniciales superfluos procurando incorporarlos a la macro como objetos ligados. Hay muchas formas de obtener un punto fuera de r de modo automático. Por ejemplo, aquí se propone trazar la mediatriz s del segmento de extremos A y B, y colocar O en una de las intersecciones de s con la circunferencia centrada en $M = s \cap r$ que pasa por A. Ahora se usa la macro de la práctica I.3.2 con r, O, A, B, C y D como datos. Se calcula $\frac{\mu_0}{\mu_1}$ y se define la nueva macro sin necesidad de incluir a O entre los objetos iniciales.

Práctica I.4.6

Involuciones en una recta



Enunciado De una involución $\sigma : r \to r$ de una recta r se conocen las imágenes de dos puntos que no son dobles. Escríbase una macro que dé el transformado de cualquier otro punto de la recta.

Indicaciones La manera más fácil de zanjar la cuestión es utilizar el teorema I.4.5. Allí se afirmaba que una recta r corta a los lados opuestos de un cuadrivértice según parejas de puntos que estén en involución. Supóngase entonces que se construye algún cuadrivértice (A, B, C, D) tal que r corta a $\overline{BC}$ en P, a $\overline{AD}$ en $\sigma(P) = P'$, a $\overline{AB}$ en Q, a $\overline{CD}$ en $\sigma(Q) = Q'$, y a $\overline{AC}$ en R'. Entonces la imagen R de $\sigma(R')$ vendría dada por

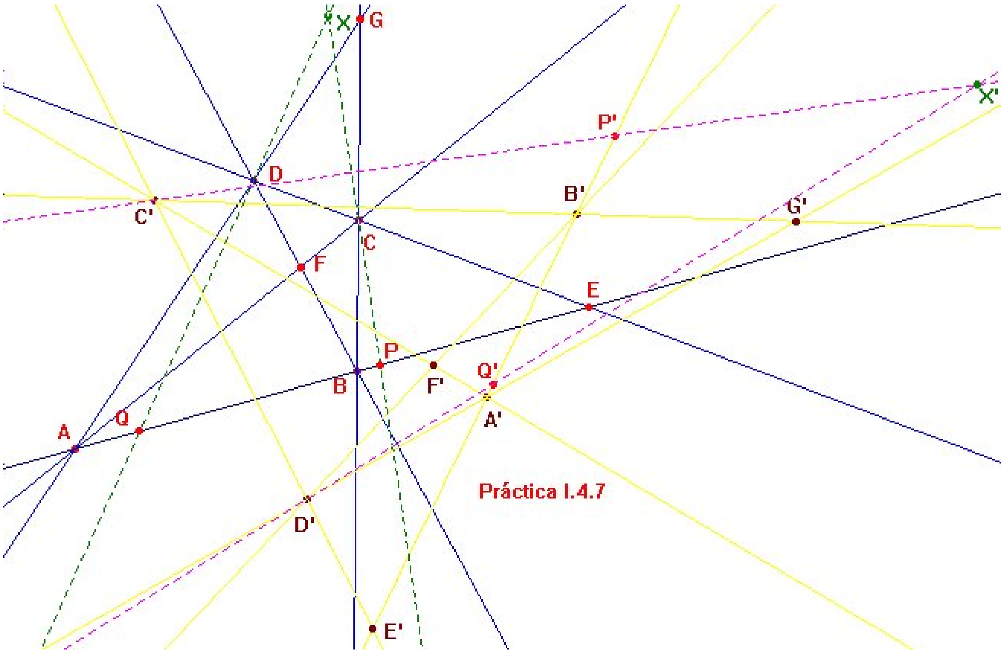
$$\sigma(R') = r \cap \overline{BD}.$$

A fin de minimizar los objetos iniciales de la macro, habrá que establecer algún mecanismo que construya el cuadrivértice él solito a partir de los datos

r, P, P', Q, Q' y R'. Hay multitud de posibilidades para ello. La que se esquematiza en la figura parte de trazar la perpendicular a r por P y llamar B y C a sus intersecciones con la circunferencia centrada en P que pasa por Q'. El punto A viene entonces determinado por $\overline{BQ} \cap \overline{CR'}$, y el D, por $\overline{AP'} \cap \overline{CQ'}$. Ahora puede definirse la macro con objetos iniciales r, P, P', Q, Q' y R', y objeto final R.

Práctica I.4.7

Proyectividades en el plano



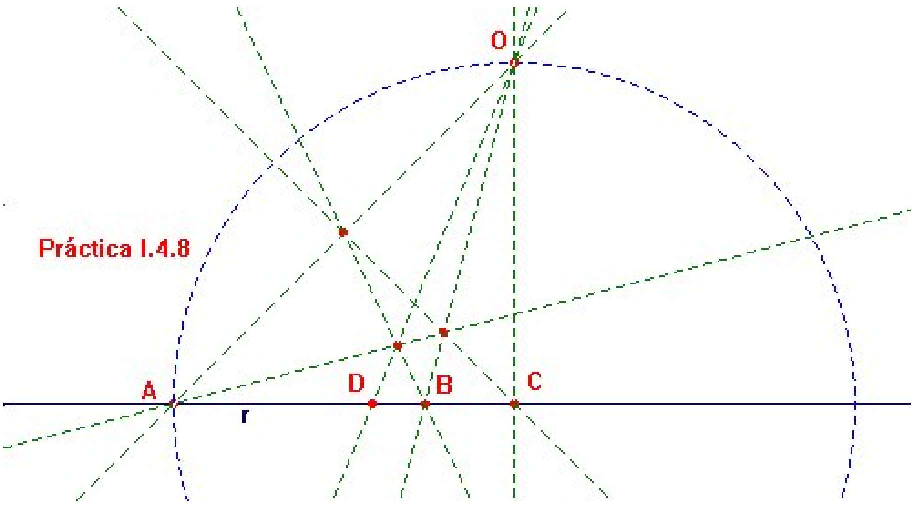
Enunciado Dada la imagen (A', B', C', D') de un símplex (A, B, C, D) por una proyectividad σ, escríbase una macro que proporcione la imagen $X' = \sigma(X)$ de cualquier otro punto X del plano.

Indicaciones Como la proyectividad transforma rectas en rectas, el punto diagonal $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$ del primer símplex ha de aplicarse en el $E' = \overline{A'B'} \cap \overline{C'D'}$. Sea $P = \overline{XC} \cap \overline{AB}$. La restricción $\sigma|_{\overline{AB}}$ de dominio de imagen de σ no es sino una proyectividad entre rectas que aplica A en A', B en B', y C en C'. La macro de la práctica I.4.2 proporciona entonces la imagen P' del punto P. Y como $X \in \overline{CP}$, se tiene $X' \in \overline{C'P'}$.

Operando de igual modo con $Q = \overline{XD} \cap \overline{AB}$, puede determinarse una segunda recta $\overline{D'Q'}$ cuya intersección con $\overline{C'P'}$ resolverá el problema.

Práctica I.4.8

Cuarto armónico de tres puntos alineados



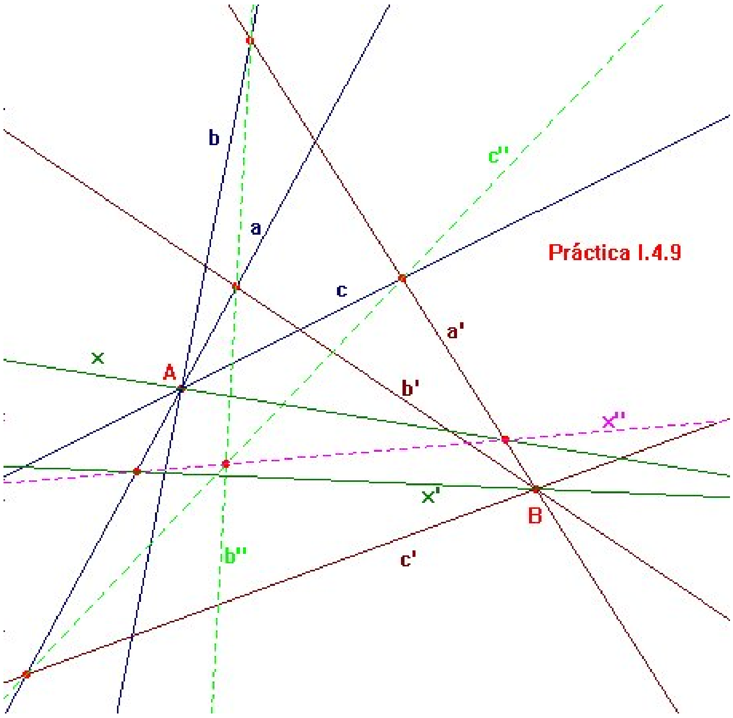
Enunciado Escríbase una macro que dé el cuarto armónico D de tres puntos alineados A, B y C.

Indicaciones El problema estará resuelto en cuanto se dé un cuadrivértice del que A y B sean vértices y C sea punto diagonal, pues D se hallará como la intersección con $\overline{AB}$ de la recta que pasa por los otros dos puntos diagonales.

En la figura se sugiere una manera de construir automáticamente tal cuadrivértice, con el fin de que los únicos objetos iniciales de la macro sean r, A, B y C.

Práctica I.4.9

Proyectividades entre haces

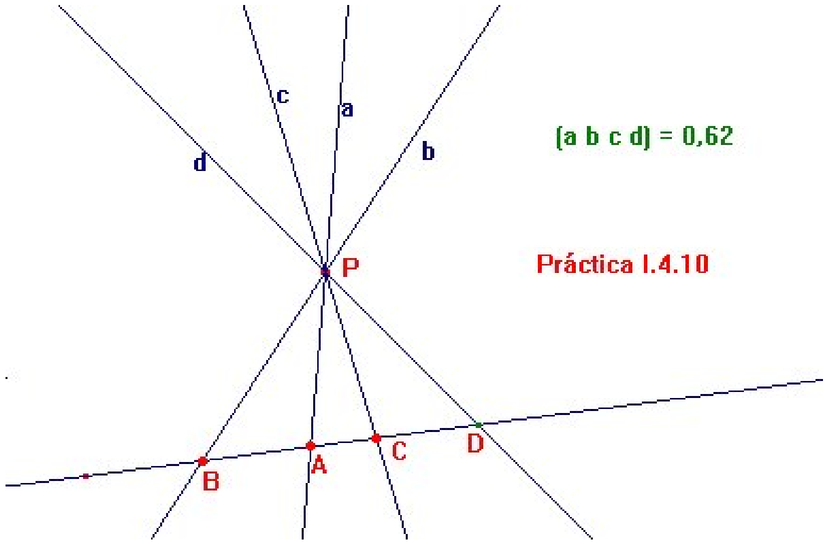


Enunciado De una proyectividad entre el haz de rectas que pasan por A y el haz de rectas que pasan por B se conocen las respectivas imágenes a', b' y c' de tres rectas $a, b, c \in A^*$. Escríbase una macro que dé la imagen x' de cualquier otra recta $x \in A^*$.

Indicaciones Se trata de dualizar el procedimiento descrito en la práctica I.4.2. Aquí, las rectas a y a' jugarán el papel de ejes de perspectiva. El haz intermedio tendrá entonces a $b'' \cap c''$ como punto base, donde $b'' = \overline{(a \cap b')(a' \cap b)}$ y $c'' = \overline{(a \cap c')(a' \cap c)}$. La proyectividad ha quedado entonces factorizada en la composición de la perspectividad $\tau_{a'} : A^* \to (b'' \cap c'')^*$ de eje a con la perspectividad $\tau_a : (b'' \cap c'') \to B^*$ de eje a'. Así, $x' = \overline{B(x'' \cap a)}$, donde $x'' = \overline{(x \cap a')(b'' \cap c'')}$.

Práctica I.4.10

Razón doble de un lápiz

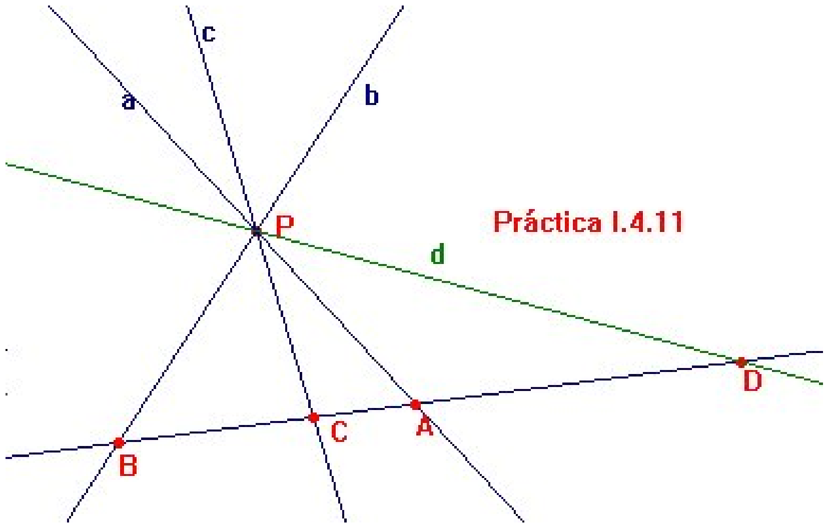


Enunciado Hállese la razón doble de un lápiz (a, b, c, d).

Indicaciones Eligiendo cualquier recta r que no pase por el punto P en que concurren las del lápiz y haciendo $A = r \cap a$, $B = r \cap b$, $C = r \cap c$ y $d = r \cap d$, se tiene que $(abcd) = (ABCD)$. Basta entonces recurrir a la macro construida en la práctica I.4.4.

Práctica I.4.11

Cuarto armónico de tres rectas concurrentes

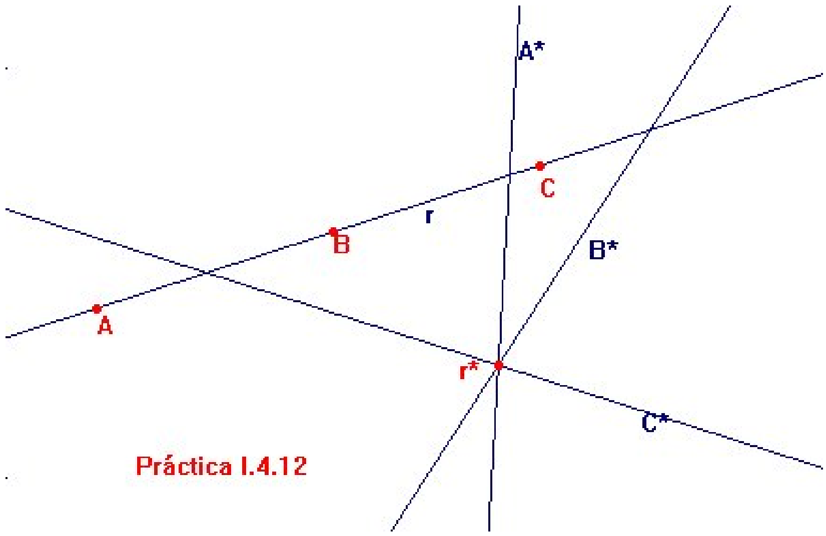


Enunciado Trácese el cuarto armónico de una terna (a, b, c) de rectas concurrentes.

Indicaciones Como en la práctica anterior, el problema puede reducirse al de construir el cuarto armónico de la terna (A, B, C) formada por las respectivas intersecciones de una recta que no pase por el punto $a \cap b$ con las rectas a, b y c, con lo que podrá recurrirse a la macro de la práctica I.4.5.

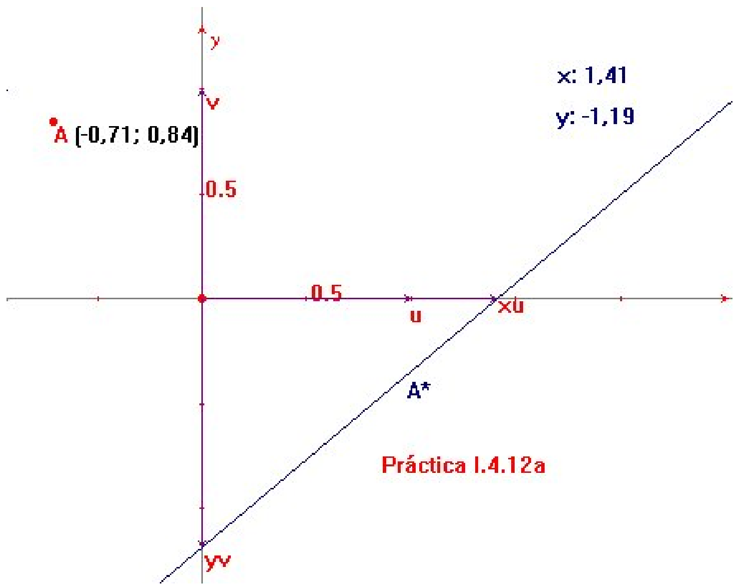
Práctica I.4.12

El principio de dualidad



Enunciado Compruébese que la correlación estándar transforma puntos alineados en rectas concurrentes.

Indicaciones En aras de la sencillez, conviene trabajar con el sistema de coordenadas homogéneas canónico y su dual. Habrá que comenzar escribiendo una macro que trace la recta A^* transformada del punto A por la correlación estándar.

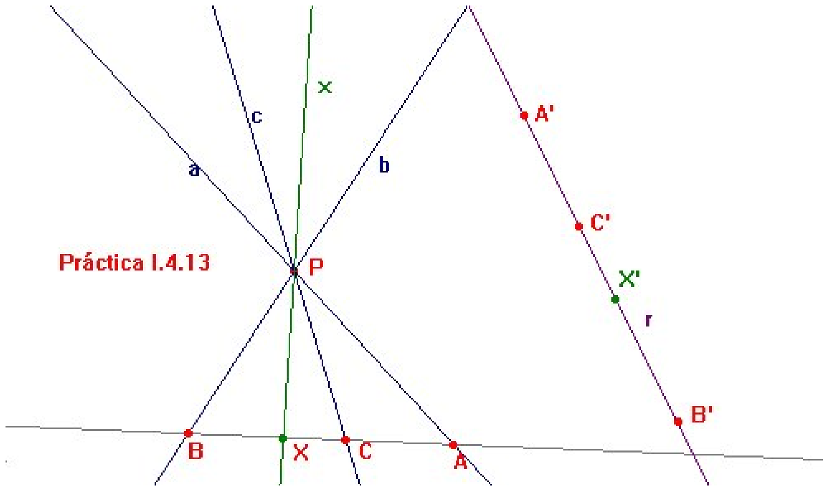


Si las coordenadas cartesianas de A que da CABRI son (α_1, α_2), es porque el punto A es el de coordenadas homogéneas $(1, \alpha_1, \alpha_2)$. Entonces la recta A^* ha de tener por ecuación $A^* \equiv x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$. El trazado de esta recta requiere el de dos de sus puntos, por ejemplo $P = (-\alpha_1, 1, 0)$ y $Q = (-\alpha_2, 1, 0)$. Si ambos están en el afín, esto es, si $0 \notin \{\alpha_1, \alpha_2\}$, entonces sus respectivas coordenadas cartesianas son $(-\frac{1}{\alpha_1}, 0)$ y $(0, -\frac{1}{\alpha_2})$. El trazado de estos dos puntos puede realizarse mediante la técnica descrita en la práctica I.3.8. Ahora habría que construir la macro auxiliar que traza la recta A^* transformada de A por la correlación estándar, y comprobar que puntos alineados se aplican en rectas concurrentes.

Obsérvese que de paso se ha obtenido un método para hallar el transformado r^* de una recta r por la correlación estándar. El lector quizá se distraiga comprobando la proposición dual de la propuesta aquí: rectas concurrentes se aplican en puntos alineados por la correlación estándar entre el plano y su dual.

Práctica I.4.13

Correlaciones



Enunciado De una correlación $\sigma : P^* \to r$ entre el haz P^* y la recta r se sabe que a se transforma en A', b en B' y c en C'. Hállese la imagen de otra recta x del haz.

Indicaciones Se recuerda que, en el plano, una correlación es una biyección entre un haz de rectas y el conjunto de puntos de una recta que conserva razones dobles. Eligiendo entonces una recta s que no pase por P, y haciendo $A = a \cap s$, $B = b \cap s$, $C = c \cap s$, se considera la proyectividad $\tau : s \to r$ que aplica A en A', B en B' y C en C'. Es obvio ahora que $\tau(x) = \sigma(X)$, con $X = x \cap s$, pues $(abcx) = (ABCX) = (A'B'C'X')$.