# II.3
# CUÁDRICAS EN EL AFÍN

## Índice del capítulo.

# CUÁDRICAS EN EL AFÍN

En estos apuntes se ha seguido la filosofía de trabajar en el proyectivo, para luego examinar lo que sucede al eliminar un hiperplano y así obtener los correspondientes resultados afines. Tras haber realizado el estudio de las cuádricas proyectivas en el capítulo anterior, ahora no supondrá demasiado esfuerzo el encontrar las correspondientes contrapartidas afines de aquellos frutos.

## §1 Posición relativa de una cuádrica y un hiperplano

En un par de ocasiones se ha mencionado la definición analítica de cuádrica en un espacio afín $K^n$: el lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas cartesianas satisfacen una ecuación polinómica de segundo grado en $n$ indeterminadas con coeficientes en $K$. El concepto de cuádrica proyectiva de la definición II.2.1 se pensó para que sus puntos afines, una vez elegido un hiperplano impropio, constituyesen una cuádrica afín. Así, dada una cuádrica $\mathcal{Q}(q)$ en un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$, con $\mathcal{P}(H)$ como uno de sus hiperplanos, resulta natural denominar *cuádrica afín* al conjunto

$$\mathcal{Q}(q) - \mathcal{P}(H) = \mathcal{Q}(q) \cap \mathcal{A}(V, H),$$

que se denotará por $\mathcal{Q}(q, H)$.

Obsérvese que la misma notación utilizada sugiere que la cuádrica afín depende no sólo de una forma cuadrática $q$, sino de un hiperplano del espacio proyectivo envolvente. Esto se debe a que la misma cuádrica proyectiva proporciona distintas cuádricas afines dependiendo del hiperplano del infinito que se escoja. Por ejemplo, considérese la cónica $\mathcal{Q}(q) \equiv x_1^2 = 0$ del plano proyectivo racional. Si se toma como recta impropia la de ecuación $x_0 = 0$, las coordenadas cartesianas de los puntos de la cónica afín resultante satisfacen la expresión $x^2 = 0$, luego se trata de una recta [1]. Sin embargo, si

[1] *En realidad, a esta cónica se le llamará más adelante* recta afín doble.

se hubiése señalado a $\mathcal{P}(H) \equiv x_1 = 0$ como recta del infinito, la cónica afín $\mathcal{Q}(q, H)$ se habría quedado sin puntos. (El lector habrá de admitir que no es lo mismo el vacío que una recta.) De ahí que se haga imprescindible como etapa preliminar para el tratado de las cuádricas afines proceder al estudio de la posición relativa entre una cuádrica proyectiva y un hiperplano.

A la restricción $\mathcal{Q}(q_H) = \mathcal{Q}(q) \cap \mathcal{P}(H)$ de una cuádrica proyectiva al hiperplano impropio se le llama la *cuádrica en el infinito* de la cuádrica afín $\mathcal{Q}(q, H)$. Se evidencia la igualdad

$$\mathcal{Q}(q) = \mathcal{Q}(q, H) \cup \mathcal{Q}(q_H),$$

que expresa la relación entre una cuádrica afín $\mathcal{Q}(q, H)$, la proyectiva $\mathcal{Q}(q)$ que la genera, y la cuádrica (proyectiva) $\mathcal{Q}(q_H)$ en el infinito.

De cualquier forma, hay que tomar precauciones con la simbología $\mathcal{Q}(q, H)$, pues esta insinúa también que una cuádrica afín determina de manera única a la cuádrica proyectiva de la cual se deriva, lo que no siempre sucede. Se ilustrará esta situación con un caso concreto. En el plano afín real, el conjunto $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ procede tanto de la cuádrica proyectiva $\mathcal{Q}(q) \equiv x_1^2 = 0$, como de $\mathcal{Q}(q') \equiv x_0 x_1 = 0$, y tomando siempre como recta del infinito la de ecuación $x_0 = 0$. Adviértase entonces que $\mathcal{Q}(q, H) = \mathcal{Q}(q', H)$ cuando ni siquiera se da la equivalencia proyectiva entre $\mathcal{Q}(q)$ y $\mathcal{Q}(q')$. (Justifique el lector esta última afirmación.)

Lo que sí se verifica es que cada conjunto $\mathcal{Q}$ de puntos de un espacio afín $n$-dimensional sobre $K$ descrito por una ecuación del tipo

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,$$

con $p$ un polinomio de segundo grado en $n$ variables con coeficientes en $K$, consiste en una cónica afín en el sentido de que existe al menos una cuádrica proyectiva $\mathcal{Q}(q)$ en $\mathcal{P}_n(K)$ tal que $\mathcal{Q}(q, H) = \mathcal{Q}$. ¿Qué cuádrica proyectiva es esa? La definida por la forma cuadrática con una incógnita adicional

$$q(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0^2 \; p(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}),$$

obtenida por medio de la homogeneización del polinomio $p$.

Se tienen entonces planteados dos problemas, el de la posición relativa entre hiperplanos y cuádricas proyectivas, y el de la unicidad de la extensión de una cuádrica afín. El segundo se aplazará para la sección siguiente, mientras que el primero será abordado en cuanto se justifique el carácter geométrico de una cuádrica afín, que es lo que viene a decir el siguiente

**Teorema II.3.1** *Si $f : V \to V'$ es un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales, entonces cada cuádrica afín $\mathcal{Q}(q, H)$ de $\mathcal{A}(V, H)$ se tranforma por la afinidad $\mathcal{A}(f)$ en una cuádrica afín de $\mathcal{A}(V', f(H))$.*

**Demostración** En vista de lo dicho en relación al teorema II.2.1, es obvio que la afinidad $\mathcal{A}(f)$ transforma la cuádrica $\mathcal{Q}(q, h)$ en la cuádrica $\mathcal{Q}(q \circ f^{-1}, f(H))$.

Y si en capítulo precendente un hecho similar permitía introducir la equivalencia proyectiva de cuádricas (definición II.2.3), ahora sería un error utilizar el teorema anterior para trasladar tal concepto al afín. Pero este es un asunto sobre el que se volverá en la sección §II.3.3.

El siguiente resultado es clave en el estudio de la posición relativa de una cuádrica proyectiva y un hiperplano.

**Teorema II.3.2** *Sea $H$ un hiperplano de un espacio vectorial $V$ de dimensión $n \geq 2$ sobre $K$ en el que hay definida una forma cuadrática $q$.*

**i)** *Si $H^\perp \not\subset H$, entonces $V$ descompone en suma ortogonal directa*

$$V =< u > \oplus H,$$

*para cada vector $u \in H^\perp - H$.*

**ii)** *Si $H^\perp \subset H$, existen entonces un subespacio $U$ y un par hiperbólico $(u, v)$, con $v \in H^\perp - \mathrm{Rad}\, V$ y $u \notin H$, tales que $V$ y $H$ descomponen en suma ortogonal directa mediante*

$$V =< u, v > \oplus U \quad \text{y} \quad H =< v > \oplus U.$$

**Demostración** En la circunstancia descrita en i), elegido un vector $u$ fuera de $H^\perp - H$ se tiene $< u > \cap H = 0$ y $V =< u > + H$. Esta última igualdad es mera consecuencia de la fórmula de Grassman (teorema I.2.1). Así, puede hablarse de la suma ortogonal directa de $< u >$ y $H$.

Supóngase ahora que $H^{\perp} \subset H$. Por el lema II.1.1,

$$\dim H^{\perp} = \dim V - \dim H + \dim(H \cap \operatorname{Rad} V) = 1 + \dim(H \cap \operatorname{Rad} V).$$

Aplicando el teorema II.1.1.i) a la inclusión $H \subset V$, se obtiene $\operatorname{Rad} V = V^{\perp} \subset H^{\perp} \subset H$, luego $H \cap \operatorname{Rad} V = \operatorname{Rad} V$ y $\operatorname{Rad} V$ se ve como un hiperplano de $H^{\perp}$. Resulta entonces factible escoger un vector $v \in H^{\perp} - \operatorname{Rad} V$. La isotropía de $v$ se deduce de pertenecer a $H^{\perp}$ y, por consiguiente a $H$, provocando la ortogonalidad de $v$ consigo mismo. Por otro lado, al no estar $v$ en el radical, el lema II.1.2) afirma que existe un vector $u$ formando par hiperbólico con $v$. De $q(u, v) = 1$ se infiere que $u \notin H$ ya que, de lo contrario, $q(u, v) = 0$. El teorema del sumando directo (teorema II.1.2)) proporciona ahora un subespacio $U$ tal que $V$ se expresa como suma ortogonal directa

$$V =< u, v > \oplus U.$$

Además, $< v > \subset H^{\perp}$ implica $H \subset H^{\perp\perp} \subset (< v >)^{\perp}$, inclusión que combinada con

$$\dim(< v >)^{\perp} = \dim V - \dim < v > + \dim(< v > \cap \operatorname{Rad} V) = \dim V - 1,$$

fuerza a la igualdad $< v >^{\perp} = H$. Por último, la relación $U \subset < v >^{\perp} = H$, junto con $\dim U = \dim V - 2$, permite escribir la suma ortogonal directa $H =< v > \oplus U$, finalizando la demostración.

Este teorema divide a las cuádricas afines $\mathcal{Q}(q, H)$ en dos tipos, aquellas para las que $H^{\perp} \not\subset H$, denominadas *cuádricas con centro*, y las que satisfacen $H^{\perp} \subset H$, llamadas *paraboloides*. Obsérvese que los paraboloides proceden de cuádricas proyectivas tangentes al hiperplano impropio pues $0 \neq H^{\perp} \cap H = \operatorname{Rad} H$ significa que la cuádrica en el infinito es degenerada.

Sea $\mathcal{Q}(q, H)$ una cuádrica con centro de un espacio afín $n$-dimensional. Si se completa una base ortogonal $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $H$ con el vector $u$, cuya existencia queda asegurada por la parte i) del teorema II.3.2), se obtiene una base ortogonal de todo $V$. En tal base, la cuádrica proyectiva queda descrita por la ecuación

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = 0,$$

la cual se transforma en

$$\mathcal{Q}(q,H) \equiv \lambda_0 + \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 = 0 \tag{1}$$

mediante el paso a coordenadas cartesianas. La matriz de $q$ en la base $\{u, u_1, \ldots, u_n\}$ toma la forma

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{array}\right),$$

y se suele representar por cajas para visualizar tanto la forma cuadrática $q$ como su restricción al infinito $q_H$.

Al no estar $u$ en el hiperplano $H$, el punto $O = < u >$ ha permanecido en el afín. Sus coordenadas cartesianas consisten en una $n$-upla llena de ceros. Por otro lado, un punto $P$ pertenece a la cuádrica si y solo si sus coordenadas $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ satisfacen la ecuación (1). De ahí que si $P \in \mathcal{Q}(q,H)$, entonces el punto $-P = (-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n)$ también está sobre la cuádrica. Pero $-P$ es simétrico de $P$ con respecto al origen de coordenadas. Ahora se explica la apostilla “con centro” endosada a estas cuádricas, ya que $O$ ejerce de centro de simetría de $\mathcal{Q}(q,H)$.

Si por el contrario $\mathcal{Q}(q,H)$ es un paraboloide, tómese el sistema de coordenadas homogéneas $\{u, v, u_2, \ldots, u_n\}$, con $(u,v)$ el par hiperbólico al que se refiere la parte ii) del teorema II.3.2), y los $u_i$ integrando una base ortogonal del subespacio $U$. La matriz de $q$ en esta base adopta el aspecto

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{array}\right).$$

La ecuación de la cuádrica proyectiva será entonces

$$\mathcal{Q}(q) \equiv 2x_0x_1 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = 0,$$

que proporciona la de la cuádrica afín

$$\mathcal{Q}(q, H) \equiv 2y_1 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 = 0, \tag{2}$$

mediante el paso a cartesianas. Ahora no hay centro de simetría, aunque sí eje. En efecto, sea $r$ la recta de ecuación

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} y_2 & = & 0 \\ y_3 & = & 0 \\ \vdots & & \\ y_n & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Para un punto $P = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ del paraboloide, su simétrico $P' = (\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$ respecto del eje sigue dentro del paraboloide.

Con respecto a la cuádrica $\mathcal{Q}(q, H)$ con $q = 0$, o sea, la cuádrica que llena el espacio, algunos textos la incluyen como paraboloide por degenerar en el hiperplano del infinito. Sin embargo, en tal circunstancia el ortogonal al hiperplano impropio (y a cualquier otro subconjunto, vamos) ocupa la totalidad del espacio, por lo que $V = H^{\perp} \not\subset H$. Resulta entonces más lógico, y así se hará en estos apuntes, considerarla como cuádrica con centro. Y esto encaja también con el hecho de que su ecuación reducida ($0 = 0$) responde al patrón de estas últimas y no al de los paraboloides que cuentan con un término de primer grado.

Las expresiones (1) y (2) se denominan *ecuaciones reducidas* de la cuádrica afín. Si $\{u, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es la base en la que una cuádrica $\mathcal{Q}(q, H)$ alcanza su ecuación reducida, se entenderá por *ejes de la cuádrica* a la parte afín de las rectas proyectivas $\overline{P_0P_i}$, con $P_0 =< u >$ y $P_i =< u_i >$. Adviértase que uno de los ejes del paraboloide, a saber, el $\overline{P_0P_1}$, se constituye en eje de simetría. A las intersecciones de la cuádrica afín con sus ejes se les suele llamar *vértices*, introduciendo así cierta confusión con el concepto de vértice manejado hasta ahora: el del conjunto de puntos singulares. Además, dependiendo del rango de la cuádrica y de la aritmética del cuerpo base, aquellos vértices pueden existir o no. Por ejemplo, sea $\mathcal{Q}$ una cuádrica con centro y, por consiguiente, con ecuación reducida del tipo (1), que no pasa por el origen ($\lambda_0 \neq 0$). Un punto del eje $\overline{P_0P_1}$ posee unas coordenadas de la forma $(\alpha, 0, \ldots, 0)$. Luego los cortes de este eje con $\mathcal{Q}$ se calcularían resolviendo la ecuación $\lambda_0 + \lambda_1\alpha^2 = 0$, la cual no posee soluciones si $\lambda_1 = 0$, o si $-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ no tiene raíz cuadrada. Sin embargo, un paraboloide (descrito por la ecuación (2)) siempre posee al menos un vértice, el que se haya fijado como origen de coordenadas $O = (0, 0, \ldots, 0)$ donde concurren todos los ejes. Si el paraboloide es no degenerado (lo que supone $0 \notin \{\lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$), entonces $O$ es el único vértice en el sistema de coordenadas escogido. Se define el *centro* de una cuádrica con centro como la parte afín del subespacio $\mathcal{P}(H^\perp)$[2]. Como en las cuádricas con centro no degeneradas todos los $\lambda_i$ han de ser distintos de $0$, el centro se reducirá al polo del hiperplano impropio.

Nótese que la definición de eje y de vértice está supeditada a la elección de cierta base en la que la ecuación de la cuádrica adopte alguno de los tipos (1) o (2). Una pregunta legítima que quizá se formule el lector es si tomando otras bases se obtienen ejes o vértices diferentes. La respuesta es sí, por supuesto. Ya se vio en el capítulo II.1 cómo una misma forma cuadrática puede diagonalizar de distintas formas y, por consiguiente, existir más de una base ortogonal. Si se examina con detenimiento la demostración del teorema II.3.2, se observará que solo hay determinados elementos en los que la selección de la base está forzada por las circunstancias. Por ejemplo, en cuádricas no degeneradas, el vector $u$, cuando $H^\perp \not\subset H$, y el vector $v$, si $H^\perp \subset H$, deben generar el subespacio unidimensional $H^\perp$. Esto significa que en cualquier sistema de ejes para una cuádrica con centro no degenerada figurará el polo del infinito (el centro $P_0 =< u >$) como origen de coordenadas, mientras

[2] *Una definición semejante para paraboloides no tendría mucho sentido pues el ortogonal al hiperplano impropio se queda en el infinito y cae fuera del afín.*

que uno de los ejes de un paraboloide ha de tener como punto del infinito $P_1 =< v >$ al polo del hiperplano impropio. En realidad, cualquier recta por $P_1$ no contenida en el infinito puede hacer de eje ya que, al no ser tangente habrá de cortar al paraboloide en un punto adicional $P_0$ que estará engendrado por un vector isótropo $u$ no ortogonal a $v$. Los vectores $u$ y $v$ forman entonces el par hiperbólico del que germina el sistema de coordenadas. En el cuaderno de prácticas se comprobará experimentalmente cómo un cambio de ejes no afecta al aspecto de la ecuación reducida.

En definitiva, en dimensión $n$, las cuádricas con centro (no degeneradas) admiten como sistema de ejes cualquier conjunto de $n$ rectas concurrentes en el centro y conjugadas dos a dos, mientras que todo punto $V$ de un paraboloide puede hacer de vértice Para cuádricas sin puntos singulares existe una terminología más fina. A una cuádrica $\mathcal{Q}(q, H)$ no degenerada y con centro se le llamará un *elipsoide* si $\mathcal{Q}(q)$ es exterior al infinito (cuádrica en el infinito vacía), y se hablará de *hiperboloides* en caso contrario, es decir, cuando $\mathcal{Q}(q)$ se sitúe secante al infinito. Como una cuádrica con centro no degenerada no puede ser tangente al infinito (razónese), esta subdivisión en hiperboloides y elipsoides es exhaustiva.

En dimensión $2$, a los hiperboloides se les conoce por *hipérbolas*, a los elipsoides, por *elipses*, y a los paraboloides no degenerados, por *parábolas* (véase la figura II.3.1.) Y se acabará esta tanda de definiciones con las de otros elementos de las cuádricas propios de la geometría afín. Para una cuádrica no degenerada, los *diámetros* son la parte afín de los hiperplanos polares de los puntos del infinito. (Adviértase que este concepto no tiene sentido más que en cuádricas afines con centro.) Por *asíntota* se entiende a una recta tangente a una cuádrica en un punto del infinito.

Se ilustrará todo lo expuesto en esta sección con un ejemplo examinando la cónica real

$$4x + 4y + 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 0,$$

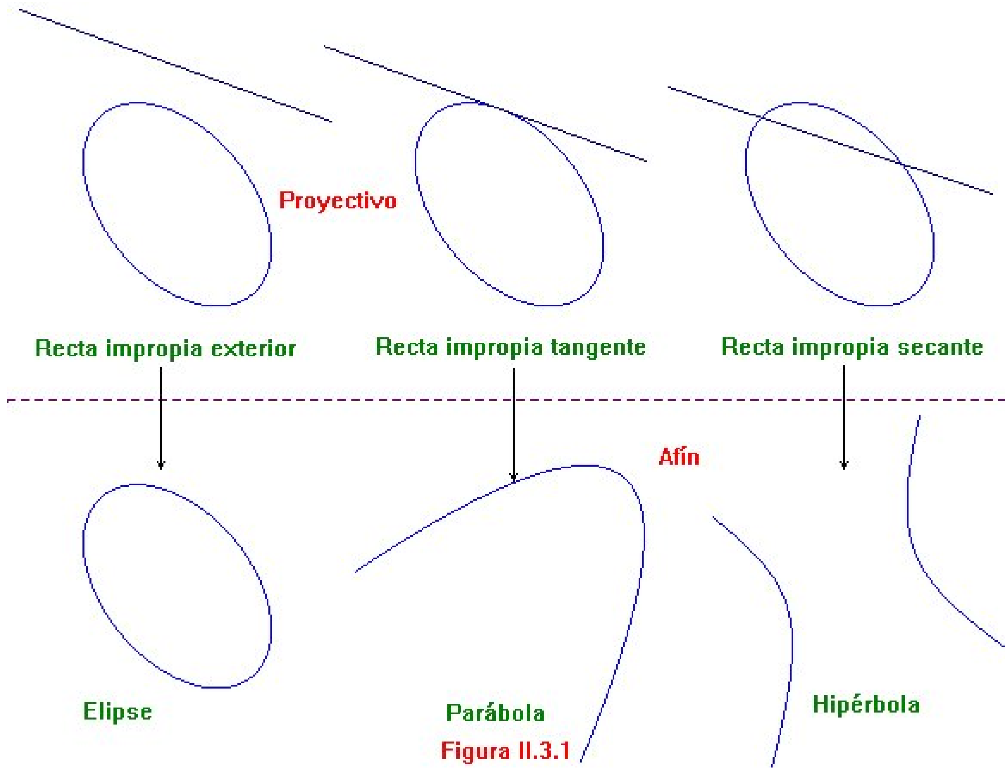


Figura II.3.1

cuya extensión proyectiva tiene por ecuación

$$4x_0x_1 + 4x_0x_2 + 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 0,$$

y por matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como el hiperplano impropio $H$ está generado por los vectores $e_1 = (0, 1, 0)$ y $e_2 = (0, 0, 1)$, las ecuaciones de $H^\perp$ se calculan imponiendo las condiciones $e_1Ax^t = 0$ y $e_2Ax^t = 0$, con $x$ el vector fila de indeterminadas $(x_0, x_1, x_2)$. Se plantea entonces el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_0 & + & x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ x_0 & - & x_1 & + & x_2 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Luego $H^\perp =< v >$ con $v = (0, 1, 1)$. Como $u \in H$, se trata de un paraboloide. Siguiendo la demostración del teorema II.3.2), se debe buscar un vector de $H^\perp - \mathrm{Rad}(\mathbb{R}^3)$. Pero en este caso puede escogerse el mismo $v$ ya que el radical se anula al ser $\det(A) \neq 0$. A continuación, se ha de encontrar pareja a $v$

para formar con él un par hiperbólico. Para ello, elíjase cualquier $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $q(v,a) \neq 0$. Por ejemplo, haciendo $a = (1,0,0)$ se tiene $q(v,a) = 4$. Así, la matriz de $q$ restringida al plano hiperbólico $P$ generado por $v$ y $a$ adquiere la forma

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Y se ha dado directamente con otro vector isótropo de $P$ independiente de $v$. Si no hubiera sucedido así, se habría tenido que recurrir al procedimiento utilizado para probar el lema II.1.2), aplicado esta vez al plano $P$. El par hiperbólico lo constituyen $u = \frac{1}{4}a$ y $v$. Se ha dividido por $4$ para que $q(u,v) = 1$. Por último, el complemento ortogonal de $P$ se obtiene mediante $aAx^t = 0$, $vAx^t = 0$, que dan $e_2 = (0,0,1)$ como solución. Concluyendo, en la base $\{u, v, e_2\}$, $A$ es congruente con

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

y la cónica posee a $2x + 2y^2 = 0$ por ecuación reducida. Se trata de un paraboloide no degenerado, o sea, una parábola. Además, con respecto al sistema de coordenadas original, el vértice de la parábola es el punto $< u >$ de coordenadas homogéneas $(\frac{1}{4}, 0, 0)$ y cartesianas $(0,0)$, mientras que los ejes vienen descritos por las ecuaciones

$$\overline{AP} \equiv x - y = 0 \quad \text{y} \quad \overline{AQ} \equiv y = 0,$$

donde $A =< u >$, $P =< v >$ y $Q =< e_2 >$.

## §2 Extensión proyectiva de una cuádrica afín

Se retornará en esta sección al otro problema planteado al principio del capítulo, el de investigar acerca de la unicidad de la cuádrica proyectiva que origina una cuádrica afín. El siguiente teorema resulta clave en este asunto.

**Teorema II.3.3** *Una cuádrica afín $\mathcal{Q}$ no contenida en ningún hiperplano (del afín), pose una única extensión proyectiva $\mathcal{Q}'$.*

**Demostración** La estrategia consistirá en probar que los puntos de la cuádrica en el infinito están determinados por los de la cuádrica afín. Para ello, bastará con encontrar una propiedad que dictamine de manera inequívoca cuándo un punto impropio está sobre $\mathcal{Q}'$ y cuándo no. A tal fin se demostrará que un punto del infinito $A$ no pertenece a $\mathcal{Q}'$ si y solamente si existe una recta por $A$ que corta a la cuádrica afín $\mathcal{Q}$ en exactamente dos puntos. Ha de quedar claro que, si se logra verificar la anterior afirmación, entonces la cuádrica afín proporciona un criterio para saber por qué puntos pasa su extensión proyectiva y, en definitiva, ésta ha de ser única.

Pues bien, supóngase que a un punto impropio $A$ de $\mathcal{Q}'$ lo atraviesa una recta $r$ con dos puntos comunes con $\mathcal{Q}$. Como $r$ comparte tres puntos con la cuádrica $\mathcal{Q}'$, ha de estar contenida en ella. Pero como se razona en cuerpos de más de dos elementos, cada recta cuenta con cuatro o más puntos. Por otro lado, la intersección de $r$ con la cuádrica en el infinito ha de reducirse a un único punto, el $A$, pues, de lo contrario, toda la recta $r$ se compondría de puntos del infinito, algo imposible al poseer puntos afines, los dos de $\mathcal{Q}'$. De ahí que la existencia de cuatro puntos en $r$ fuerza a que $r \cap \mathcal{Q}'$ tenga como mínimo tres puntos. En conclusión, no hay rectas por los puntos impropios de $\mathcal{Q}'$ que corten a $\mathcal{Q}$ en exactamente dos puntos.

Para la inclusión recíproca, tómese $A$ impropio y fuera de $\mathcal{Q}'$. Esto último implica la no singularidad de $A$. Por consiguiente, el subespacio polar $A^{\perp}$ de $A$ es un hiperplano. Por la hipótesis sobre $\mathcal{Q}$, resulta posible escoger un $B \in \mathcal{Q} - A^{\perp}$. En particular, $B$ reside en el exterior del vértice pues hay al menos un punto, el $A$, del cual no es conjugado. Además, el teorema II.2.5 impide la tangencia entre la recta $\overline{AB}$ y la cuádrica $\mathcal{Q}'$. De ahí que $\overline{AB} \cap \mathcal{Q}'$ conste exactamente de dos puntos, el $B$ y otro que se llamará $C$. ¿Qué ocurriría si $C$ fuese impropio?, que $B$ se marcharía al infinito al reposar en $\overline{AC}$. Luego $C$ pertenece al afín y, por tanto, a $\mathcal{Q}$.

Los argumentos de arriba demuestran que los puntos afines de una cuádrica no contenida en un hiperplano determinan su cuádrica del infinito de forma única. El caso más obvio que escapa a las condiciones del teorema se presenta cuando la cuádrica afín ya es un hiperplano. Por ejemplo, la cuádrica $z = 0$ de $\mathbb{Q}^3$ procede tanto de la cuádrica proyectiva $x_0 x_2 = 0$ como de $x_2^2 = 0$.

El disponer de una condición que asegure la unicidad de la extensión proyectiva de una cuádrica afín justifica investigar qué cuádricas afines están contenidas en hiperplanos. Aquí se realizará la parte más bizarra de este trabajo, dejando los detalles para los ejercicios. El discurso comienza con los dos siguientes lemas, cuya demostración también se omite.

**Lema II.3.1** *Si los vectores isótropos de un espacio vectorial provisto de una forma cuadrática constituyen un subespacio, entonces todo vector isótropo está en el radical.*

**Lema II.3.2** *Una cuádrica proyectiva no vacía contenida en un hiperplano se reduce al vértice.*

Se pretende a continuación buscar una cuádrica no degenerada $\mathcal{Q}$ de un espacio proyectivo $\mathcal{P}$ sobre $K$ tal que, para ciertos hiperplanos $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$, la cuádrica afín $\mathcal{Q} - \mathcal{H}$ está contenida en el hiperplano $\mathcal{H}' - \mathcal{H}$ del afín. Es evidente que $\mathcal{Q} \subset \mathcal{H} \cup \mathcal{H}'$. Si $\dim \mathcal{P} = 0$, los hiperplanos serían vacíos en contra de lo supuesto para $\mathcal{Q}$. Para $\dim \mathcal{P} = 1$, los hiperplanos se reducen a puntos y $\mathcal{Q}$ se convierte en una cuádrica no degenerada dentro de una recta proyectiva, en suma, o el vacío o dos puntos (los dos hiperplanos), con uno de ellos en el infinito.

Supóngase entonces que $\dim \mathcal{P} = n \geq 2$. El lema II.3.2 permite reducir el trabajo al caso en que la cuádrica no esté contenida en uno sólo de los dos hiperplanos. De ahí que deba cortar a cada uno de ellos en un punto que no está en el otro, es decir, existen $A, B \in \mathcal{Q}$, tales que $A \in \mathcal{H} - \mathcal{H}'$ y $B \in \mathcal{H}' - \mathcal{H}$. Se anuncia al lector que como etapa imprescindible para el objetivo marcado se probará que el subespacio

$$\mathcal{S} = (A^{\perp} \cap B^{\perp}) \cap (\mathcal{H} \cap \mathcal{H}')$$

es vacío. Para ello se requieren de unos pasos previos. El primero consiste en ver que los puntos $A$ y $B$ no son conjugados respecto de $\mathcal{Q}$ pues, de lo contrario (o sea, $A \in B^{\perp}$) la recta $\overline{AB}$ sería tangente a la cuádrica (recuérdese el teorema II.2.5)) y tiene dos puntos comunes con ella. Esto implica $\overline{AB} \subset \mathcal{Q}$. Basta entonces elegir un punto adicional $P$ en la recta distinto de $A$ y de $B$ para llegar a contradicciones. (Si, por ejemplo, $P \in \mathcal{H}$, entonces $B \in \overline{AP} \subset \mathcal{H}$.)

Además, todo punto de la cuádrica situado en el subespacio $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}'$ es conjugado de $A$ o de $B$. En efecto, sea $Q \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}'$ un punto de la cuádrica, con $A, B \notin Q^{\perp}$. La recta $\overline{AB}$ debe poseer otros puntos $M$ y $N$ distintos de $A$ y $B$. Se afirma que al menos una de las rectas $\overline{QM}$ o $\overline{QN}$ es secante a la cuádrica ya que, de ser ambas tangentes (la posibilidad de situarse exteriores se desecha por razones obvias), se tiene $M, N \in Q^{\perp}$, lo que supone $A, B \in \overline{MN} \subset Q^{\perp}$. Si es $\overline{QM}$ la secante a $\mathcal{Q}$, entonces ha de cortar a la cuádrica en otro punto $L \neq Q$ que pertenece a alguno de los dos hiperplanos. De la opción $L \in \mathcal{H}$ se deduce que $M \in \overline{QL} \subset \mathcal{H}$ y $B \in \overline{AM} \subset \mathcal{H}$. Un absurdo similar se obtendría de la otra suposición.

Se demostrará ahora que el subespacio $\mathcal{S}$ está contenido en la cuádrica. Tómese un $C$ dentro de $\mathcal{S}$. Como $C \notin \overline{AB}$ (razónese), los puntos $A$, $B$ y $C$ determinan un plano que se denotará por $\pi_0$. Escribiendo $r = \pi_0 \cap \mathcal{H}$, $s = \pi_0 \cap \mathcal{H}'$ y $\mathcal{C} = \pi_0 \cap \mathcal{Q}$, se puede restringir el razonamiento a la cónica $\mathcal{C}$ del plano $\pi_0$, la cual está contenida en la unión de las rectas $r$ y $s$. Conocido del capítulo anterior el aspecto de las cónicas de un plano, se ha de concluir con que $\mathcal{C}$, degenere o no, debe poseer otros puntos aparte de $A$ y $B$. Sea $E$ uno de esos puntos. Cualquiera de las opciones $E \in r$ o $E \in s$ conduce a $C \in \mathcal{Q}$, ya que habrá una recta por $C$ tangente a la cuádrica cortándola en dos puntos.

Como $\mathcal{Q} \cap \mathcal{S}$ es la cuádrica que llena el subespacio $\mathcal{S}$, todo par de puntos de $\mathcal{S}$ son conjugados respecto de $\mathcal{Q}$. Si existiera algún $C \in \mathcal{S}$, la descomposición

$$\mathcal{P} = \overline{AB} + (\mathcal{H} \cap \mathcal{H}'),$$

junto a la no degeneración de $\mathcal{Q}$, impiden que $C$ sea conjugado de todo el subespacio $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}'$. Hay entonces un $R \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}'$ con $R \notin C^{\perp}$. La recta $\overline{CR}$ es pues secante a la cuádrica y la corta en otro punto $D \neq C$. El punto $D$ pertenece al subespacio $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}'$, luego la parte probada lo obliga a que sea conjugado de $A$ o de $B$. Sin embargo, no puede serlo de ambos ya que entonces $D \in \mathcal{S}$ sería conjugado de $C$, mientras que la recta $\overline{CD}$ no es tangente a $\mathcal{Q}$.

Ahora toca razonar en el subespacio $\mathcal{E}$ de dimensión $3$ engendrado por los cuatro puntos no coplanarios $A$, $B$, $C$ y $D$.

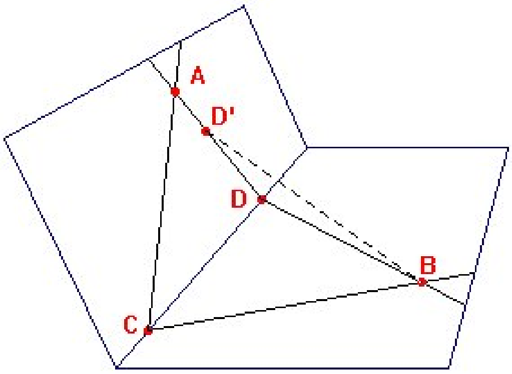



Figura II.3.3

En él, los planos $\pi_1 = A + C + D$ y $\pi_2 = B + C + D$ son las respectivas secciones de $\mathcal{E}$ por los hiperplanos $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$, las cuales se intersecan según la recta $\overline{CD}$. Como antes, pueden considerarse las cónicas resultantes de la intersección de diversos planos de $\mathcal{E}$ con la cuádrica, por ejemplo, la contenida en $\pi_1$ debe degenerar en $\overline{AC} \cup \overline{AD}$. Pero la que interesa examinar aquí es la sección cónica $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{Q}$ por el plano $\pi_3 = A + B + D$. Esta ha de contener a toda la recta $\overline{AD}$ más el punto $B$ fuera de $\overline{AD}$. Debe haber entonces otra recta por $B$ contenida en $\mathcal{C}'$. Sea esta $\overline{BD'}$ con $D' \in \overline{AD}$. Si $D' \notin \pi_2$, entonces hay puntos de la cuádrica que no están ni en $\mathcal{H}$ ni en $\mathcal{H}'$. Y $D' \neq D$ ya que se tomó $D$ no conjugado de $B$. Se ha llegado a este callejón sin otra salida que el absurdo por haber concebido un punto $C$ en el subespacio $\mathcal{S}$, lo que prueba, por fin, que

$$(A^{\perp} \cap B^{\perp}) \cap (\mathcal{H} \cap \mathcal{H}') = \emptyset.$$

Lo importante de este hecho es que proporciona información crucial acerca de la dimensión $n$ del espacio proyectivo $\mathcal{P}$. Se está razonando en la hipótesis $n > 1$. Por otro lado, tanto $A^\perp \cap B^\perp$ como $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}'$ son subespacios de $\mathcal{P}$ de dimensión $n-2$. Al ser distintos (razónese esta afirmación), se cortan según un subespacio de dimensión a lo sumo $n-3$. Pero esta intersección es vacía, luego $n-3 \leq -1$ y $n \leq 2$. Y ahora es cuando uno se da cuenta de que todo el rato se ha estado argumentando en un plano proyectivo, con $\mathcal{Q}$ una cónica no degenerada contenida en la unión de dos rectas distintas $r$ y $s$. Además, el punto de intersección $C = r \cap s$ no puede pertenecer a la cónica ya que esta tendría a $C$ como vértice. Esto obliga a que no haya más de tres puntos en cada recta pues ni $r$ ni $s$ han de estar contenidas por completo en $\mathcal{Q}$. Por último, una cónica degenerada y no vacía tiene tantos puntos como cualquier recta del plano (ejercicio II.2.3), y como el cuerpo más pequeño de característica distinta de $2$ posee $3$ escalares, en la cónica se cuentan al menos $4$ puntos (ejercicio I.3.9).

En conclusión, $\mathcal{Q}$ consta exactamente de cuatro puntos (distribuidos dos en cada recta), y el cuerpo, de tres elementos, luego se trata de la cónica no degenerada del plano proyectivo sobre $\mathbb{Z}_3$: cuatro puntos sin tres de ellos colineales. Se tiene entonces demostrado el

**Teorema II.3.4** *Las únicas cuádricas proyectivas no degeneradas y no vacías cuya restricción al afín está contenida en un hiperplano son:*

**i)** *la que consiste en dos puntos de una recta proyectiva con uno de ellos en el infinito, y*

**ii)** *la constituida por un símplex del plano proyectivo sobre $\mathbb{Z}_3$ con dos puntos en el infinito, en definitiva, una cuádrica no degenerada de $\mathcal{P}_2(\mathbb{Z}_3)$* [3].

La importancia del teorema anterior reside en que basta imponer unas

[3] *Este resultado se propone como ejercicio en* [Gruemberg y Weir] *añadiendo el comentario de que no supone excesivas dificultades. Sin embargo, el autor de estos apuntes solo ha logrado desarrollar dos demostraciones no demasiado sencillas. Una es la aquí expuesta. La otra, que puede consultarse pinchando aquí, no es sino la contrapartida analítica de los anteriores argumentos sintéticos. Por eso se anima al lector audaz a que busque algo más simple. Si lo consigue, se le agradecerá que lo comunique.*

condiciones en extremo débiles para asegurar que una cuádrica afín se origina por una única cuádrica proyectiva.

**Corolario II.3.1** *En dimensión mayor que* $1$ *y sobre cuerpos con más de* $3$ *elementos, si una cuádrica afín no vacía posee extensión proyectiva no degenerada, entonces esta es única.*

La determinación de las cuádricas proyectivas degeneradas contenidas en una pareja de hiperplanos parece ahora fácil. Sólo se requiere usar que tal cuádrica $\mathcal{Q}$, o bien se reduce al vértice si la directriz es vacía, en cuyo caso no es sino un vulgar subespacio (lema II.3.2), o bien nace como unión conjuntista del haz de rectas que pasan por el vértice y se apoyan en una directriz. Suponiendo que se presenta este segundo caso y que $\mathcal{Q}$ no está totalmente contenida ni en $\mathcal{H}$ ni en $\mathcal{H}'$, operando como antes se obtendrán puntos de la cuádrica $A$ y $B$, con $A \in \mathcal{H} - \mathcal{H}'$ y $B \in \mathcal{H}' - \mathcal{H}$, no conjugados y, por consiguiente, fuera del vértice. Tomando ahora un suplemento $W$ del radical con $A, B \in \mathcal{P}(W)$, los subespacios $H \cap \mathcal{P}(W)$ y $H' \cap \mathcal{P}(W)$ se convierten en hiperplanos cuya unión aloja a una directriz. Se proseguiría entonces la búsqueda de $\mathcal{Q}$ con la ayuda del teorema II.3.4. Hágase, si se desea, como ejercicio.

## §3 Clasificación afín de las cuádricas

**Definición II.3.1** Sean $V$ y $V'$ dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo provistos de sendas formas cuadráticas $q$ y $q'$. Tómense un hiperplano $H$ de $V$, y otro $H'$ de $V'$. Se dirá de los pares $(q, H)$ y $(q', H')$ que son *afínmente equivalentes* si existe un isomorfismo lineal $f : V \to V'$ tal que $q = q' \circ f$ y $f(H) = H'$. Por *clasificar cuádricas* en un espacio afín $\mathcal{A}(V, H)$ se entiende el dar, salvo equivalencias afines, la lista de todos los pares $(q, H)$ que definen las cuádricas $\mathcal{Q}(q, H)$ del espacio.

Varias son las observaciones que toca hacer ahora. En primer lugar, adviértase que la definición fuerza a que $\dim(V) = \dim(V')$. Por otro lado, según se vio en la prueba del teorema II.3.1, si los pares $(q,H)$ y $(q',H')$ son afínmente equivalentes, con $q = q' \circ f$ y $f(H) = H'$, entonces la afinidad $\mathcal{A}(f)$ aplica la cuádrica $\mathcal{Q}(q,H)$ en la cuádrica $\mathcal{Q}(q', f(H))$. Sin embargo, el recíproco falla pues tal vez existan cuádricas, no solo transformadas una en la otra por una afinidad, sino incluso iguales como conjuntos, que han sido originadas por pares $(q,H)$ no equivalentes. Piénsese, por ejemplo, en las cuádricas afines de $\mathbb{Q}^3$

$$\mathcal{Q} \equiv x^2 = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{Q}' \equiv 2x = 0.$$

Ambas ecuaciones describen al plano $x = 0$. No obstante, si se consideran procedentes de las formas cuadráticas

$$q(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \quad \text{y} \quad q'(x_0, x_1, x_2, x_3) = 2x_0x_1,$$

y con hiperplano impropio de ecuación $x_0 = 0$, se visualiza con claridad que $(q,H)$ no es afínmente equivalente a $(q',H)$ [4]. De hecho, las cuádricas proyectivas $\mathcal{Q}(q)$ (un plano) y $\mathcal{Q}(q')$ (dos planos secantes en una recta) no son proyectivamente equivalentes. Tal circunstancia no se producía en espacios proyectivos donde el hecho de que una cuádrica se transformase en otra por una proyectividad se usaba como definición de equivalencia. Pero es que allí, el conjunto de puntos de una cuádrica proporcionaba información decisiva acerca de la forma cuadrática. Recuérdese, si no, cómo el rango y el índice de Witt de $q$ dependen de la dimensión del vértice y la de los subespacios proyectivos maximales contenidos en $\mathcal{Q}(q)$. Por el contrario, cuando a uno le dan una cuádrica en un espacio afín, sin decir de quién procede, parte de los datos precisos para determinar su origen proyectivo se han quedado inaccesibles en el hiperplano del infinito. De ahí que se haya optado en estos apuntes por reservar el concepto de equivalencia afín a los pares $(q,H)$ y no a las propias cuádricas afines [5].

[4] *Por resaltar alguna diferencia, nótese que $q$ tiene rango $1$, mientras que el rango de $q'$ es $2$.*

[5] *Otros autores evitan esta molestia distinguiendo entre la cuádrica afín (la clase de equivalencia del par $(q,H)$) y el conjunto de puntos de una cuádrica afín.*

Con respecto a esta discusión, nótese también que carecería de rigor hablar del rango (o índice) de una cuádrica afín, a menos que esta tenga extensión proyectiva única. De ahí la importancia del estudio llevado a cabo en la sección anterior. Por ejemplo, considérense dos cuádricas afines $\mathcal{Q}(q,H)$ y $\mathcal{Q}(q',H')$ definidas en sendos espacios afines $\mathcal{A}(V,H)$ y $\mathcal{A}(V',H')$. Si ninguna de las dos está contenida en hiperplanos afines, entonces sí que tendría sentido hablar de equivalencia proyectiva entre las cuádricas proyectivas que las generan, pero no en otro caso.

Eso sí, si $(q,H)$ y $(q',H')$ son pares afínmente equivalentes, es obvio que se da la equivalencia proyectiva entre las cuádricas $\mathcal{Q}(q)$ y $\mathcal{Q}(q')$. Y si $f$ es el isomorfismo lineal tal que $q' = q \circ f$, entonces también son proyectivamente equivalentes las cuádricas en el infinito $\mathcal{Q}(q_H)$ y $\mathcal{Q}(q'_{H'})$ [6]. Este hecho, junto con el teorema II.2.11), hace innecesaria la demostración del

**Teorema II.3.5** *Son condiciones necesarias para la equivalencia afín de dos pares $(q,H)$ y $(q',H')$ (definidos en los respectivos espacios vectoriales $V$ y $V'$ de la misma dimensión sobre un cuerpo $K$) que coincidan los rangos e índices de Witt tanto de las formas cuadráticas $q$ y $q'$ como de $q_H$ y $q'_{H'}$. Para $K$, o bien algebraicamente cerrado, o bien un cuerpo ordenado en el que cada elemento positivo admita raíz cuadrada, tales condiciones también son suficientes.*

De nuevo el enunciado contempla dos de los casos más importantes, el real y el complejo, cuya descripción detallada en dimensiones bajas se realizará más adelante. Pero antes de eso conviene observar ciertas relaciones entre los rangos e índices de una forma cuadrática y los de su restricción a un hiperplano.

Sea $\mathcal{Q}(q,H)$ una cuádrica de un espacio afín $\mathcal{A}(V,H)$. Denótense por $r$ y $r_0$ a los respectivos rangos de $q$ y $q_H$, y por $i$ e $i_0$ a sus índices de Witt.

[6] *El recíproco también es cierto, es decir, si $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}'$ son cuádricas afines no contenidas en hiperplanos y tales que no solo se da la equivalencia proyectiva entre $\mathcal{Q}(q)$ y $\mathcal{Q}(q')$, sino también entre sus cuádricas del infinito, entonces los pares $(q,H)$ y $(q',H')$ son afínmente equivalentes. Por desgracia, la demostración de tan interesante resultado, obtenido por Witt en 1936, escapa al alcance de estos apuntes.*

Gracias al teorema II.3.2, puede encontrarse una base de $V$ en la que $q$ se describe mediante una matriz del tipo

$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{array}\right),$$

si se trata de una cuádrica con centro, o

$$A = \left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{array}\right).$$

en el caso del paraboloide. En ambas circunstancias, tachando la primera fila y la primera columna se obtiene la matriz de $q_H$. Una simple ojeada a las matrices permite afirmar que $0 \leq r - r_0 \leq 2$, mientras que la igualdad $r - r_0 = 2$ nada más que se produce en los paraboloides. Además, como un subespacio totalmente isotrópico de $H$ también lo es de $V$ y entre las dimensiones de $V$ y $H$ sólo media una unidad, entonces $0 \leq i - i_0 \leq 1$. Para $r - r_0 = 2$, es decir, para un paraboloide, siempre existe el plano hiperbólico que determina el par $(u, v)$ y que se visualiza en la $(2 \times 2)$-esquina superior izquierda de $A$. Este plano no está contenido en $H$. Pero quizá haya más planos hiperbólicos en el complemento ortogonal de $< u,\ v >$, los cuales, aparte de alojarse dentro de $H$, también constituyen planos hiperbólicos de $V$. (Los vectores $u$ y $v$ son los mencionados en el apartado ii) del teorema II.3.2.) De ahí que $i = i_0 + 1$. Por último, para $r = r_0$ se razonaría sobre una cuádrica con centro. La igualdad de rangos implica que $\lambda_0 = 0$, por lo que $u \in \operatorname{Rad} V$ y los subespacios totalmente isotrópicos maximales de un suplemento del radical se encuentran en $H$. Luego $i = i_0$. Resumiendo,

$$0 \leq r - r_0 \leq 2, \qquad \text{y} \qquad r - r_0 = 2 \ \text{ para los paraboloides,}$$

$$0 \leq i - i_0 \leq 1, \quad r - r_0 = 2 \text{ implica } i = i_0 + 1, \quad \text{y} \quad r = r_0 \ \text{ implica } i = i_0.$$

Para cuádricas afines procedentes de formas cuadráticas no degeneradas, se suele utilizar la siguiente terminología: a las regladas se les denomina también *hiperbólicas*, mientras que el adjetivo *elíptica* se aplica a las no regladas.

Se pasa ahora a dar la lista, incluyendo un modelo de ecuación reducida, de las cónicas afines reales. Se omite el proceso de elaboración puesto que sólo hay que tener en mente el teorema II.3.2, las matrices de $q$ y $q_H$, así como las relaciones obtenidas para los rangos e índices de Witt.

**I** Cónicas con centro

**I.1** $r = 3$, $r_0 = 2$, $i = 0$, $i_0 = 0$, $1 + x^2 + y^2 = 0$,

*elipse imaginaria*

**I.2** $r = 3$, $r_0 = 2$, $i = 1$, $i_0 = 0$, $-1 + x^2 + y^2 = 0$,

*elipse real*

**I.3** $r = 3$, $r_0 = 2$, $i = 1$, $i_0 = 1$, $1 + x^2 - y^2 = 0$,

*hipérbola*

**I.4** $r = 2$, $r_0 = 2$, $i = 0$, $i_0 = 0$, $x^2 + y^2 = 0$,

*dos rectas secantes imaginarias* (que se cortan en un punto real)

**I.5** $r = 2$, $r_0 = 2$, $i = 1$, $i_0 = 1$, $x^2 - y^2 = 0$,

*dos rectas secantes*

**I.6** $r = 2$, $r_0 = 1$, $i = 0$, $i_0 = 0$, $x^2 + 1 = 0$,

*dos rectas imaginarias paralelas*

**I.7** $r = 2$, $r_0 = 1$, $i = 1$, $i_0 = 0$, $x^2 - 1 = 0$,

*dos rectas paralelas*

**I.8** $r = 1$, $r_0 = 1$, $i = 0$, $i_0 = 0$, $x^2 = 0$,

*recta doble*

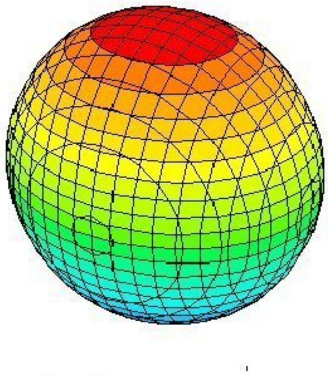
**I.9** $r = 1$, $r_0 = 0$, $i = 0$, $i_0 = 0$, $1 = 0$,

*recta impropia doble* (el vacío)

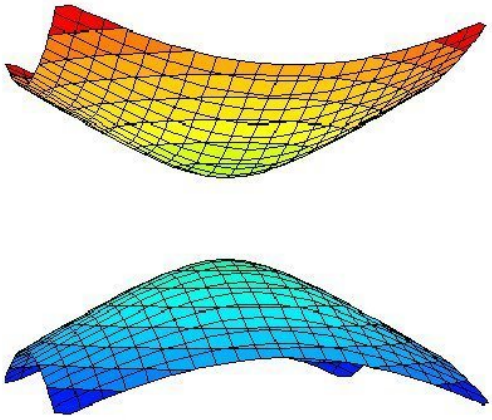
**I.10** $r = 0$, $r_0 = 0$, $i = 0$, $i_0 = 0$, $0 = 0$,

*todo el plano*

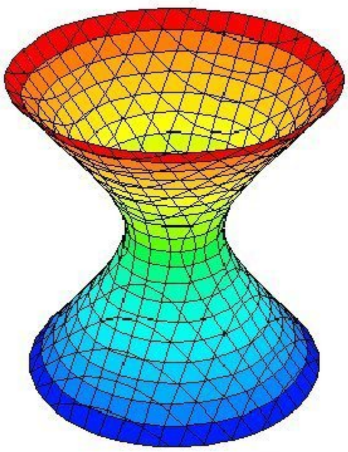
**II** Paraboloides



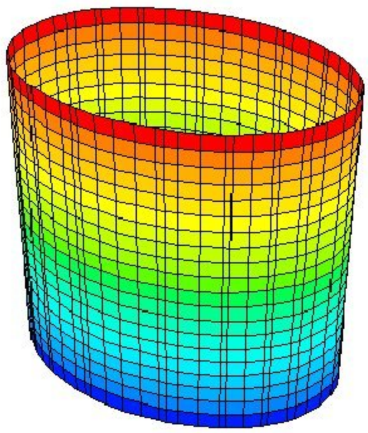
Elipsoide



Hiperboloide de dos hojas



Hiperboloide de una hoja



Cilindro de base una elipse

**II.1** $r = 3$, $r_0 = 1$, $i = 1$, $i_0 = 0$, $2x + y^2 = 0$,

*parábola*

**II.2** $r = 2$, $r_0 = 0$, $i = 1$, $i_0 = 0$, $2x = 0$,

*una recta* (y la impropia)

Y ahora se procede de igual forma a clasificar las cuádricas tridimensionales del espacio afín $\mathbb{R}^3$.

**I** Cuádricas con centro

**I.1** $r = 4$, $r_0 = 3$, $i = 0$, $i_0 = 0$, $1 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$,

*elipsoide imaginario*

**I.2** $r = 4$, $r_0 = 3$, $i = 1$, $i_0 = 0$, $-1 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$,

*elipsoide real*

**I.3** $r = 4$, $r_0 = 3$, $i = 1$, $i_0 = 1$, $1 - x^2 + y^2 + z^2 = 0$,

*hiperboloide elíptico* (o de dos hojas)

**I.4** $r = 4$, $r_0 = 3$, $i = 2$, $i_0 = 1$, $1 - x^2 + y^2 - z^2 = 0$,

*hiperboloide hiperbólico* (o de una hoja)

**I.5** $r = 3$, $r_0 = 3$, $i = 0$, $i_0 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$,

*cono imaginario* (de vértice real)

**I.6** $r = 3$, $r_0 = 3$, $i = 1$, $i_0 = 1$, $-x^2 + y^2 + z^2 = 0$,

*cono* (real)

**I.7** $r = 3$, $r_0 = 2$, $i = 0$, $i_0 = 0$, $1 + x^2 + y^2 = 0$,

*cilindro imaginario* (vértice imaginario impropio)

**I.8** $r = 3$, $r_0 = 2$, $i = 1$, $i_0 = 0$, $-1 + x^2 + y^2 = 0$,

*cilindro* (de base una elipse)

**I.9** $r = 3$, $r_0 = 2$, $i = 1$, $i_0 = 1$, $-1 + x^2 - y^2 = 0$,

*cilindro* (de base una hipérbola)

**I.10** $r = 2$, $r_0 = 2$, $i = 0$, $i_0 = 0$, $x^2 + y^2 = 0$,

*par de planos imaginarios* (secantes en una recta real)

**I.11** $r = 2$, $r_0 = 2$, $i = 1$, $i_0 = 1$, $x^2 - y^2 = 0$,

*par de planos secantes*

**I.12** $r = 2$, $r_0 = 1$, $i = 0$, $i_0 = 0$, $1 + x^2 = 0$,

*par de planos imaginarios paralelos*

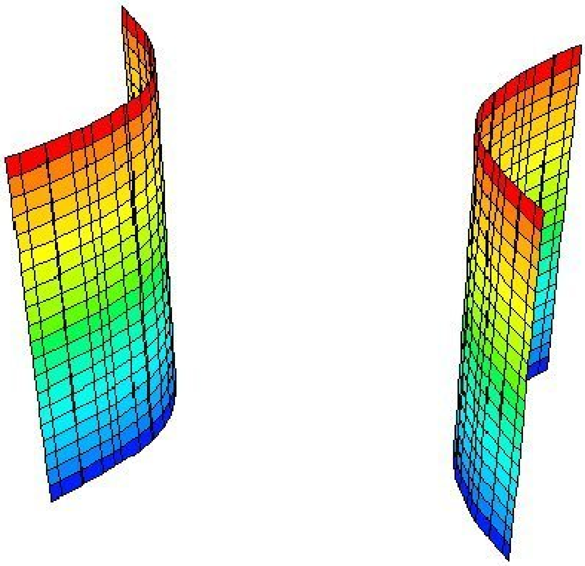
**I.13** $r = 2$, $r_0 = 1$, $i = 1$, $i_0 = 0$, $-1 + x^2 = 0$,

*par de planos paralelos*

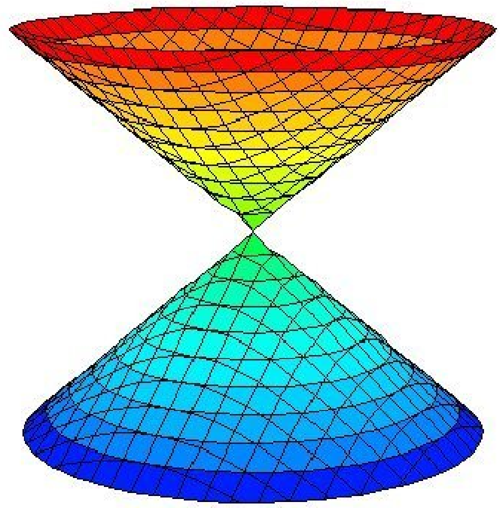
**I.14** $r = 1$, $r_0 = 1$, $i = 0$, $i_0 = 0$, $x^2 = 0$,

*plano doble*

**I.15** $r = 1$, $r_0 = 0$, $i = 0$, $i_0 = 0$, $1 = 0$,



Cilindro de base una hipérbola



Cono

*plano impropio doble* (el vacío)

**I.16** $r = 0$, $r_0 = 0$, $i = 0$, $i_0 = 0$, $0 = 0$,

*todo el espacio*

**II** Paraboloides

**II.1** $r = 4$, $r_0 = 2$, $i = 1$, $i_0 = 0$, $2x + y^2 + z^2 = 0$,

*paraboloide elíptico*

**II.2** $r = 4$, $r_0 = 2$, $i = 2$, $i_0 = 1$, $2x - y^2 + z^2 = 0$,

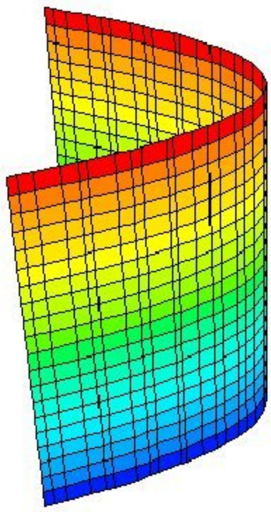
*paraboloide hiperbólico*

**II.3** $r = 3$, $r_0 = 1$, $i = 1$, $i_0 = 0$, $2x + y^2 = 0$,

*cilindro* (de base una parábola)

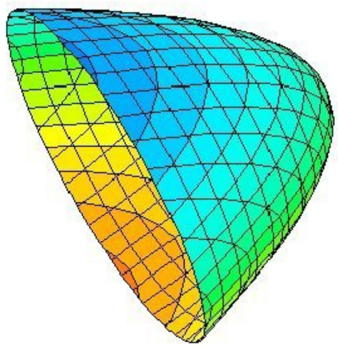
**II.4** $r = 2$, $r_0 = 0$, $i = 1$, $i_0 = 0$, $2x = 0$,

*un plano* (y el impropio)

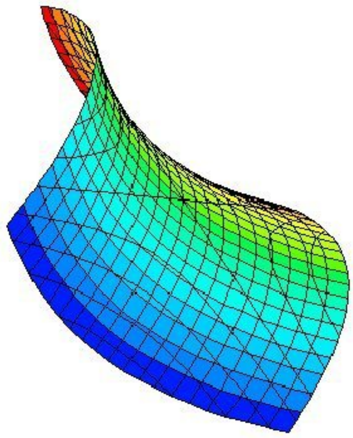


Cilindro de base una parábola

Las relación de cónicas y cuádricas tridimensionales complejas se obtiene de las tablas anteriores sin más que limitarse a leer, entre los casos con idénticos valores para $r$ y $r_0$, aquellos en los que tanto $i$ como $i_0$ alcancen el máximo posible. Por ejemplo, no hay más cuádrica tridimensional compleja no degenerada que el hiperboloide hiperbólico. En estas páginas se ofrecen imágenes de algunas cuádricas no degeneradas de $\mathbb{R}^3$.



Paraboloide elíptico



Paraboloide hiperbólico

## §4 Ejercicios

**1)** Pruébese que si un diámetro corta a una cónica en dos puntos distintos $A$ y $B$, entonces se trata de una cuádrica con centro. Además, el punto medio $M = \frac{A+B}{2}$ está en el centro de la cuádrica.

**2)** Sea $(A, B, C, D)$ un trapecio inscrito en una cónica $\mathcal{Q}$, con $\overline{AC} \| \overline{BD}$, de puntos diagonales $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$ y $F = \overline{AD} \cap \overline{BC}$ situados en el afín. Supóngase que $\mathcal{Q}$ no llena el plano. ¿Qué puede decirse de la recta $\overline{EF}$.

Indicación: distínganse los casos en que la cónica tenga centro o sea un paraboloide.

**3)** Sea $\mathcal{Q}$ una cuádrica no degenerada y no vacía de un espacio afín de dimensión $n$.

**i)** Si $\mathcal{Q}$ tiene centro $O$, razónese por qué cualquier conjunto de $n$ rectas por $O$ conjugadas dos a dos constituye un sistema de ejes de la cuádrica.

**ii)** Si $\mathcal{Q}$ es un paraboloide, demuéstrese que todos los posibles ejes de simetría son paralelos a una recta $r$. Además, elegido un punto cualquiera $V$ de $\mathcal{Q}$, el conjunto formado por la paralela a $r$ por $V$ más $n-1$ rectas tangentes a $\mathcal{Q}$ en $V$ y conjugadas entre sí constituye un sistema de ejes del paraboloide.

**4)** Demuéstrense los lemas II.3.1 y II.3.2.

**5)** Descríbanse todas las cuádricas de un espacio proyectivo de dimensión $4$ contenidas en la unión de dos hiperplanos.

**6)** En un espacio afín de dimensión $3$, dese algún ejemplo de una cuádrica vacía que posea una extensión proyectiva no degenerada y otra de rango $1$.

*** 7)** En el espacio proyectivo $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ considérese la familia de planos

$$\{\pi_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha\beta \neq 0\} \text{ con } \pi_{\alpha,\beta} \equiv 2\beta x_0 + \alpha x_1 + \alpha x_3 = 0.$$

Dada la cuádrica proyectiva

$$\mathcal{Q}(q) \equiv -x_0^2 + 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2x_3 = 0,$$

clasifíquense las cuádricas afines $\mathcal{Q}(q, \pi_{\alpha,\beta})$ según los valores de $\alpha$ y $\beta$.

**8)** Dada la familia de cónicas reales $2\lambda - 1 + 2x + (2\lambda - 1)x^2 + y^2 = 0$,

**i)** Dese la clasificación afín en función de $\lambda$.

**ii)** Para $\lambda = -1$, hállense las asíntotas y el centro.

**iii)** ¿Es siempre el centro de una hipérbola la intersección de las dos asíntotas?

**9)** Calcúlense los ejes y la ecuación referida a ellos de la cuádrica real

$$-1 + 4z - 2xy + 2xz - y^2 + 2yz - z^2 = 0.$$

**10)** ¿Qué valor hay que dar al parámetro $\lambda$ para que la cónica

$$x^2 - \lambda xy + 2y^2 - x - 2 = 0$$

esté formada por dos rectas?

**11)** Hállense las ecuaciones de las tangentes desde el origen de coordenadas a la cónica $y^2 - 2xy + 2y - 4x - 2 = 0$. Dese el centro (si existe) y la tangente en el punto $(-\frac{1}{2}, 0)$.

**12)** Se considera la cónica

$$\alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{01}x + 2\alpha_{02}y + \alpha_{00} = 0.$$

**i)** Demuéstrese que las coordenadas del centro son las soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{01} = 0 \\ \\ \alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{02} = 0 \end{array} \right\}.$$

**ii)** Compruébese que las cónicas de centro $(\alpha, \beta)$ son las de la familia

$$\lambda(x-\alpha)^2 + \mu(y-\beta)^2 + \nu(x-\alpha)(y-\beta) + \zeta = 0.$$

**13)** Hállese el lugar geométrico de los polos de la recta $x + y = 0$ con respecto a la familia de cónicas reales $x^2 + 2\lambda y - 2y^2 + 2\lambda x - 1 = 0$.

**14)** Descríbase el lugar geométrico de los puntos del plano afín real tales que sus polares respecto a las cónicas

$$y^2 - 2\lambda x + \lambda^2 = 0,$$

con $\lambda$ un real no nulo, pasen por $(-1, 1)$ y se mantengan paralelas a $y = 2x$.

**15)** Calcúlese la ecuación del cono real que tiene por vértice el punto $(1, 2, 2)$ y por directriz la hipérbola contenida en el plano $y = 0$ que satisface

$$\frac{z^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

. **16)** Clasifíquese la familia de cuádricas de $\mathbb{R}^3$

$$\mu x^2 + (1+\mu)y^2 + (1+\mu)z^2 + 2\mu xy + 2\mu xz + 2\mu yz - 2y + \lambda + 1 = 0.$$

**17)** En un plano afín sobre un cuerpo con $q$ elementos, ¿de cuántos puntos puede constar una cónica no degenerada?

**18)** Clasifíquense las cónicas del plano afín sobre $\mathbb{Z}_3$.

**19)** Utilícese el ejercicio II.2.13 para enunciar una propiedad acerca de la hipérbola que permita construir un punto de ella conocidas sus asíntotas y otro de sus puntos.

**20)** Demuéstrese que los ejes de una cuádrica con centro son ejes de simetría de la cuádrica, mientras que de los ejes de un paraboloide, uno funciona como eje de simetría, y los demás se sitúan tangentes al paraboloide por el vértice. Entiéndase aquí la simetría en el mismo sentido que se le dio en la sección §1, es decir, si $\{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$ es un sistema de coordenadas homogéneas con $< u_1, \ldots, u_n >$ el hiperplano impropio, entonces el simétrico del punto $P = (y_1, \ldots, y_n)$ respecto del eje $< u_0, u_j >$ será el punto de coordenadas

$$(y_1, y_2, \ldots, y_{j-1}, -y_j, y_{j+1}, \ldots, y_n).$$

**21)** De una parábola se conocen dos puntos $A$ y $B$ y sus respectivos simétricos $A'$ y $B'$ respecto del eje de simetría de la parábola. Utilícese el recíproco del teorema de Pascal (teorema II.2.10) para obtener otro punto más de la parábola.

**22)** En este ejercicio se construirá un contraejemplo al recíproco de la primera parte del teorema II.3.5. Considérense las cónicas

$$\mathcal{Q} \equiv x^2 + y^2 = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{Q}' \equiv x^2 + 2y^2 = 1$$

del plano racional $\mathbb{Q}^2$.

**i)** Pruébese que ambas cónicas son no vacías, y no están incluidas en hiperplanos. Esto, tras recordar el comentario previo al teorema citado, permite plantearse la pregunta de si $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}'$ son afínmente equivalentes.

**ii)** Compruébese que el conjunto de invariantes $\{r, r_0, i, i_0\}$ de $\mathcal{Q}$ (rangos e índices de la extensión proyectiva única de $\mathcal{Q}$, y de la cuádrica del infinito) son los mismos que los de $\mathcal{Q}'$.

**iii)** Razónese por qué no puede darse la equivalencia afín entre $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}'$.

**23)** Hállense todas las hipérbolas del plano afín real de asíntotas $y = x+2$ y $x = -1$.

El lector ha de intentar resolver este último ejercicio con lo desarrollado en los apuntes. Sin embargo, se hace notar que también es factible abordarlo con los conocimientos del bachillerato. En efecto, cualquier paralela a una asíntota corta a una hipérbola en exactamente un punto (¿por qué?). Ello permite, en este caso en el que una de las asíntotas es vertical, concebir a la cónica como la traza de una función racional del tipo $y = \frac{p(x)}{q(x)}$, con $p(x)$ un polinomio de segundo grado y $q(x)$ el polinomio $x+1$ (medítese la razón). El cálculo de los coeficientes de $p(x)$ se reduce ahora a aplicar las recetillas que se les enseña a los alumnos de secundaria para obtener las asíntotas inclinadas de una función real de variable real. Si ninguna de las asíntotas fuese vertical (esta no es la situación), con un giro del tipo $(x', y') = (x, y)\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, se colocaría a una de ellas en posición vertical para situarse en las condiciones anteriores. Ahora se operaría conforme al procedimiento de arriba, para luego deshacer el giro.