



# II.1

## GEOMETRÍA ORTOGONAL

---

### Índice del capítulo.

- §1 Formas cuadráticas
  - §2 Descomposición de Sylvester
  - §3 Descomposición de Witt
  - §4 Ejercicios
- 





# GEOMETRÍA ORTOGONAL

Como el objetivo de este capítulo se centrará en el establecimiento de técnicas útiles para el estudio de cónicas y cuádricas, solo se enunciarán los resultados necesarios para tales fines, y se probarán aquellos teoremas cuya demostración incluya métodos de trabajo.

Si se está familiarizado con las formas bilineales y cuadráticas, basta con leerse los enunciados aquí contenidos y realizar los ejercicios del final como simple tarea de recuerdo. Si, por el contrario, se quiere ampliar conocimientos, se recomienda a [Kaplansky] y a [Jacobson] como referencias básicas.

## §1 Formas cuadráticas

Desde la introducción de las coordenadas en geometría, una de las definiciones más comunes del concepto de cónica consiste en el lugar geométrico de los puntos de un plano afín  $K^2$  cuyas coordenadas cartesianas satisfacen una ecuación de segundo grado en dos variables

$$(1) \quad \alpha_{00} + 2\alpha_{01}x + 2\alpha_{02}y + \alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + \alpha_{22}y^2 = 0.$$

El misterio de esos signos que figuran multiplicando a algunos de los coeficientes así como la manera de indizar a estos se desvelará en breve. Solo hay que pasar a coordenadas homogéneas, haciendo  $x = \frac{x_1}{x_0}$ ,  $y = \frac{x_2}{x_0}$ , y multiplicar por  $x_0^2$  para obtener la ecuación homogénea de segundo grado

$$\alpha_{00}x_0^2 + 2\alpha_{01}x_0x_1 + 2\alpha_{02}x_0x_2 + \alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{22}x_2^2 = 0,$$

la cual, expresada en términos matriciales, queda

$$(x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{01} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{02} & \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

## Apuntes de geometría afín y proyectiva

Se recuerda que un polinomio  $q$  en  $n$  variables con coeficientes en un cuerpo  $K$  es *homogéneo de segundo grado* si todos sus sumandos tienen grado 2 o, equivalentemente, si

$$q(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^2 q(x_1, \dots, x_n),$$

para cada  $\lambda \in K$ .

Volviendo a la cónica afín descrita por la ecuación (1), una vez sumergida en el proyectivo resulta que consta de puntos cuyos vectores fila de coordenadas  $x$  satisfacen  $xAx^t = 0$  para cierta matriz simétrica  $A$ . Parece entonces útil considerar la aplicación  $q : (u, v) \mapsto q(u, v) = uAv^t$  de  $K^3$  en  $K$  y estudiar sus propiedades. Por lo pronto, de hechos conocidos acerca del producto de matrices, resulta que

$$q(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)Av^t =$$

$$\lambda_1 u_1 Av^t + \lambda_2 u_2 Av^t = \lambda_1 q(u_1, v) + \lambda_2 q(u_2, v),$$

y la aplicación  $q$  disfruta de la linealidad en la primera componente. De un modo semejante se llegaría a la linealidad en la segunda componente, luego  $q$  es *bilineal*. Además, usando que la traspuesta de una matriz cuadrada de orden 1 coincide con ella misma, se tiene que

$$q(u, v) = uAv^t = (uAv^t)^t = vA^t u^t = vAu^t = q(v, u).$$

Todo ello motiva la siguiente

**Definición II.1.1** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $K$ . Un *producto interno* es una forma bilineal simétrica de  $V \times V$  a  $K$ , es decir, una aplicación  $q : (u, v) \mapsto K$  tal que

**i)**  $q(\lambda u + \mu v, w) = \lambda q(u, w) + \mu q(v, w),$

**ii)**  $q(u, \lambda v + \mu w) = \lambda q(u, v) + \mu q(u, w)$  y

**iii)**  $q(u, v) = q(v, u),$

para cualesquiera  $u, v, w \in V$  y  $\lambda, \mu \in K$ .

A una aplicación  $q : V \rightarrow K$  se le llama *forma cuadrática* si  $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$  para cada  $u \in V$  y cada  $\lambda \in K$  y, además, la aplicación de  $V \times V$  a  $K$  dada por  $(u, v) \mapsto q(u, v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v))$  constituye un producto interno. A esta última función se la denomina la *polarizada de  $q$* .

Nótese que una forma cuadrática y su polarizada se representan por la misma letra. Y tal conducta no lleva a ninguna confusión gracias al distinto número de argumentos de una y otra.

El concepto de forma cuadrática se introdujo con el ánimo de integrar la característica 2, en cuyo caso se debería haber eliminado el  $\frac{1}{2}$  como coeficiente de la polarizada de  $q$ . Sin embargo, como en estos apuntes se renunció en cierto momento a seguir tratando con cuerpos de tal característica, conviene conservarlo por razones de exclusiva índole estética. Véase por qué. Cada producto interno  $q$  produce una forma cuadrática  $u \mapsto q(u, u)$  cuya polarizada coincide con  $q$ . En efecto,

$$\frac{1}{2}(q(u+u, u+u) - q(u, u) - q(u, u)) = \frac{1}{2}(4q(u, u) - 2q(u, u)) = q(u, u),$$

Y recíprocamente, dada una forma cuadrática  $q$ , su polarizada ya es, por definición, un producto interno cuya forma cuadrática asociada  $u \mapsto q(u, u)$  actúa de igual modo que la original. De haber suprimido el  $\frac{1}{2}$  se habrían duplicado las expresiones en estos trasiegos de ida y vuelta, lo cual no presenta mayores problemas cuando lo importante, en referencia al estudio de las cónicas, es investigar cuándo se anulan estas aplicaciones.

Ejemplos de formas cuadráticas se encuentran a patadas siguiendo la idea que inspiró su introducción. Para el  $K$ -espacio vectorial  $K^n$ , cualquier matriz simétrica  $A$  de orden  $n$  define una forma cuadrática, la determinada por  $u \mapsto uAu^t$ , de polarizada  $q(u, v) = uAv^t$ . A continuación, se comprobará que, en esencia, no hay más ejemplos que este.

Sea  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  una base de un espacio vectorial  $V$  sobre  $K$  provisto de una forma cuadrática  $q$ . Pues bien, basta conocer los valores de los  $n^2$  productos internos  $q(u_i, u_j) = \alpha_{ij}$ , para calcular cualquier otro producto

interno. En efecto, para vectores  $u = \sum_i \lambda_i u_i$  y  $v = \sum_i \mu_i u_i$ , se tiene

$$q(u, v) = q\left(\sum_i \lambda_i u_i, \sum_j \mu_j u_j\right) =$$

$$\sum_i \sum_j \lambda_i q(u_i, u_j) \mu_j = \sum_j \left(\sum_i \lambda_i \alpha_{ij}\right) \mu_j,$$

y reconociendo productos matriciales en el último miembro, el producto interno se expresa en la forma

$$q(u, v) = xAy^t,$$

con  $x$  el vector fila de las coordenadas de  $u$ ,  $y$  el vector fila de las coordenadas de  $v$ , y  $A = (\alpha_{ij})$  la matriz cuadrada de orden  $n$  de elementos  $\alpha_{ij}$ . Además,  $A$  es simétrica pues  $\alpha_{ij} = q(u_i, u_j) = q(u_j, u_i) = \alpha_{ji}$ .

Si  $A$  es la matriz de una forma cuadrática con respecto a cierta base, y  $B$ , la matriz de la misma forma cuadrática, pero con respecto a otra base, entonces  $A = PBP^t$  con  $P$  la matriz inversible del cambio de base. De las matrices  $A$  y  $B$  se dice que son *congruentes*. En el conjunto de las matrices cuadradas de orden  $n$ , la congruencia constituye una relación de equivalencia. Conviene advertir cuantas veces sea preciso que la congruencia no guarda relación directa ni con la semejanza ni con la equivalencia de matrices y por eso viene a cuento realizar aquí un comentario.

Una matriz, como cualquier otro objeto matemático, es un concepto abstracto capaz de interpretarse de muy distintas formas según el papel que juegue en cada ambiente concreto. Entre otras muchas cosas, lo mismo representa a un sistema de ecuaciones lineales que a una aplicación lineal. Y también, como se acaba de ver, una matriz simétrica se asocia a una forma cuadrática. En cada una de estas circunstancias, matrices diferentes pueden describir al mismo individuo. Cuando esto sucede, surge una relación de equivalencia que agrupa en una clase a todas esas matrices. Para sistemas de ecuaciones lineales, dos matrices  $A$  y  $B$  son *equivalentes* (y permítase la simplificación), si una se convierte en la otra por una serie finita de operaciones

elementales. Recuérdese que estas operaciones consisten en multiplicar una ecuación por un escalar no nulo, permutarla con otra o sumársela a otra. La *semejanza* de matrices mete en el mismo saco a quienes encarnan a la misma aplicación lineal. Dependiendo de las bases elegidas para dominio e imagen, la matriz  $A$  se hace semejante a matrices  $PAQ^{-1}$  con  $P$  y  $Q$  las matrices inversibles de aquellos cambios de base. Esto, como resulta obvio, no parece compartir muchas similitudes con la congruencia.

**Definición II.1.2** En un espacio vectorial  $V$  provisto de una forma cuadrática  $q$ , se dice que dos vectores  $u$  y  $v$  son *ortogonales* si  $q(u, v) = 0$ . Los vectores ortogonales a sí mismos se denominan *isótropos*. A una base integrada por vectores ortogonales dos a dos se le llama *base ortogonal*. Un subespacio *totalmente isótropico* es el compuesto por vectores isótropos, mientras que un subespacio *no isótropico* no contiene más vector isótropo que el 0. El *radical de  $V$*  (denotado  $\text{Rad}(V)$ ), es el conjunto de los vectores ortogonales a todo el espacio. Expresado en forma conjuntista,

$$\text{Rad}(V) = \{u \in V : q(u, v) = 0, \text{ para cada } v \in V\}.$$

El *ortogonal*  $S^\perp$  de un subconjunto  $S$  de  $V$  es el conjunto de los vectores de  $v$  ortogonales a cada vector de  $S$ . Al espacio  $V$  y a la forma cuadrática  $q$  se les adjudica el adjetivo *degenerado* si  $\text{Rad } V$  posee otros vectores además del 0. El espacio  $V$  se descompone en *suma ortogonal-directa* de los subespacios  $S$  y  $T$ , si  $V = S \oplus T$  y  $q(S, T) = 0$ , es decir,  $q(u, v) = 0$  para cada  $u \in S$  y  $v \in T$ . Con mayor generalidad, de una suma directa  $\bigoplus_{i=1}^n S_i$  de subespacios  $S_i$  se dice que es una suma ortogonal-directa, si cada vez que  $i \neq j$ , se tenga  $q(S_i, S_j) = 0$ .

Con la terminología establecida, puede escribirse  $\text{Rad } V = V^\perp$ . Ahora se justificará aquel “en esencia” que se usó más arriba cuando se afirmaba que  $(u, v) \mapsto uAv^t$  constituía el único ejemplo de forma cuadrática. Como era de esperar, aquello se refería a que existe cierto tipo de transformaciones entre espacios provistos de producto interno que da lugar a una identificación.

## Apuntes de geometría afín y proyectiva

En este caso, por *isometría* se entiende a un isomorfismo lineal  $f$  entre dos  $K$ -espacios vectoriales  $V$  y  $V'$ , sobre los que hay definidas sendas formas cuadráticas  $q$  y  $q'$ , y que satisface  $q'(f(u)) = q(u)$  para cualquier  $u \in V$ .

Se recogen a continuación una serie de hechos sencillos de probar, pero de suma importancia para el estudio de las formas cuadráticas.



**Teorema II.1.1** Si  $q : V \rightarrow K$  es una forma cuadrática en el  $K$ -espacio vectorial  $V$ , se satisfacen entonces las siguientes propiedades:

i) El ortogonal  $S^\perp$  de cada subconjunto  $S$  de  $V$  es un subespacio. En particular, el radical constituye un subespacio. Además,  $S \subset T$  implica  $T^\perp \subset S^\perp$ .

ii) Un subespacio  $S$  de  $V$  tal que  $V = \text{Rad } V \oplus S$  nunca puede degenerar.

iii) Si  $A$  representa a la matriz de  $q$  en cualquier base, la dimensión de  $V$  se obtiene como suma de la dimensión del radical con el rango de  $A$ . Así, la no degeneración de  $q$  equivale a la inversibilidad de  $A$ .

iv) Cuando  $V$  es totalmente isotrópico, entonces  $q(u, v) = 0$  para cada  $u, v \in V$  y la matriz de  $q$  en cualquier base se llena de ceros.

v) La no isotropía de un subespacio conlleva la no degeneración del mismo.

**Demostración** Según lo anunciado, solo se probará la parte iii) debido a que ilustra un procedimiento para el cálculo del radical. De cualquier forma, el resto no representa demasiadas dificultades y, aunque no se exigirán todas ni siquiera en los ejercicios, tal vez fuese útil para el lector intentar abordarlas a fin de adquirir soltura con las formas cuadráticas. Para abordar el apartado iii), supóngase que  $q$  tiene a  $A = (\alpha_{ij})$  por matriz en la base  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . Una condición necesaria y suficiente para que un vector  $v$  pertenezca al radical es que  $q(u_i, v) = 0$  para cada uno de los  $u_i$ . Escribiendo  $v = \sum_i x_i v_i$  como combinación lineal de los  $u_i$  e imponiendo las  $n$  condiciones  $q(u_i, v) = 0$  se obtiene

$$0 = q(u_i, \sum_j x_j u_j) = \sum_j q(u_i, u_j) x_j = \sum_j \alpha_{ij} x_j,$$

lo que da lugar al sistema lineal homogéneo de  $n$  ecuaciones en  $n$  incógnitas

$$\sum_j \alpha_{ij} x_j = 0 \quad (i \in \{1, \dots, n\})$$

de matriz  $A$ . El espacio de las soluciones describe al radical. El hecho conocido de que su dimensión vendrá dada por la diferencia entre el número de

incógnitas y el rango de la matriz acaba el razonamiento. En realidad, las ecuaciones de  $\text{Rad } V$  como subespacio serán un subconjunto de  $k$  igualdades linealmente independientes de entre las  $n$  anteriores con  $k$  el rango de  $A$ .

Antes de proseguir, se formularán algunos comentarios al Teorema II.1.1. En v) se afirmaba que la no isotropía de un subespacio es una propiedad más fuerte que la no degeneración. Y esto se adivina, por ejemplo, en el hecho de que la primera se hereda mientras que la segunda no. Para verlo en un caso concreto, defínase en el espacio vectorial racional  $\mathbb{Q}^3$  la forma cuadrática  $q$  cuya matriz en la base canónica  $\{e_1, e_2, e_3\}$  viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

El determinante de  $A$  no se anula, por tanto  $q$  no degenera en todo  $V$ . Sin embargo, el subespacio engendrado por  $e_1$  no solo degenera, sino que es totalmente isotrópico.

Otro hecho bastante útil se refiere a la parte ii). En ella se asegura que cualquier suplemento  $S$  del radical constituye un subespacio no degenerado. Recuértese que por *suplemento* de un subespacio  $R$  se entiende cualquier otro subespacio  $T$  tal que  $V = R \oplus T$ . El mismo subespacio  $R$  puede poseer varios suplementos. Pues bien, el apartado ii) permite reducir la mayoría de los razonamientos acerca de formas cuadráticas a las no degeneradas y obviar así a un radical de escaso interés algebraico. Ello, sin embargo, no elimina el papel geométrico que jugará el radical en el estudio de cónicas y cuádricas.

Por último, téngase siempre en mente que un espacio vectorial  $V$  provisto de forma cuadrática dota de formas cuadráticas a sus subespacios vectoriales (las correspondientes restricciones), por lo que resulta coherente hablar del radical  $\text{Rad } S$  de un subespacio  $S$ . En este caso se tiene que  $\text{Rad } S = S \cap S^\perp$ . Justifíquese esta aseveración.

El enunciado siguiente formula una relación bastante útil entre las dimensiones de un subespacio y su ortogonal, sea éste degenerado o no.

**Lema II.1.1** Para cualquier subespacio  $S$  de un espacio vectorial  $V$  con forma cuadrática, se verifica

$$\dim S^\perp = \dim V - \dim S + \dim(S \cap \text{Rad } V).$$

**Corolario II.1.1** Para un subespacio  $S$  de un espacio vectorial  $V$  no degenerado, se tiene

$$(S^\perp)^\perp = S.$$

**Teorema II.1.2** (Teorema del sumando directo) Sean  $V$  un espacio vectorial sobre  $K$  con producto interno  $q$  y  $S$  un subespacio de  $V$  no degenerado. Entonces  $V$  se descompone en la suma ortogonal-directa  $V = S \oplus S^\perp$ . En tal situación, a  $S^\perp$  se le denomina el **complemento ortogonal** de  $S$ .

**Teorema II.1.3** (Diagonalización) Cada espacio vectorial  $V$  provisto de forma cuadrática  $q$  posee una base ortogonal.

**Demostración** El nombre de diagonalización proviene de que la matriz de  $q$  adquiere forma diagonal cuando se expresa en relación a una base ortogonal. El razonamiento que se desarrolla a continuación se atribuye a Witt. Comiencese por buscar en  $V$  algún vector no isótropo  $u_1$ . La no existencia de tal vector supondría, por la parte iv) del teorema II.1.1, la ortogonalidad de cualquier pareja de vectores de  $V$ , por lo que cualquier base se convierte en una base ortogonal. La no isotropía del subespacio  $V_1$  engendrado por  $u_1$  junto con el **teorema del sumando directo**, permiten la descomposición  $V = V_1 \oplus V_1^\perp$  en suma ortogonal-directa. Ahora se le aplica a  $V_1^\perp$  la misma disyuntiva que a  $V$ : si en el complemento ortogonal de  $V_1$  no hay vectores no isótropos, se completa  $u_1$  con cualquier base de  $V_1^\perp$  para obtener la base ortogonal de  $V$ . En caso contrario, elíjase  $u_2$  en  $V_1^\perp$  con  $q(u_2) \neq 0$ . Ahora, la matriz de  $q$  restringida al subespacio  $V_2$  engendrado por  $u_1$  y  $u_2$  toma la forma

$$q|_{V_2} \sim \begin{pmatrix} q(u_1) & 0 \\ 0 & q(u_2) \end{pmatrix}.$$

## Apuntes de geometría afín y proyectiva

Como  $\det(A) = q(u_1)q(u_2) \neq 0$ , el subespacio  $V_2$  tampoco degenera y es lícito escribir  $V = V_2 \oplus V_2^\perp$ . De nuevo se topa el razonamiento con dos alternativas, o el subespacio  $V_2^\perp$  es totalmente isotrópico o contiene algún  $u_3$  con  $q(u_3) \neq 0$ . La primera acaba el proceso completando  $\{u_1, u_2\}$  con una base de  $V_2^\perp$ . La segunda da lugar a un  $V_3 = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$  que satisface  $V = V_3 \oplus V_3^\perp$  y

$$q|_{V_3} \sim \begin{pmatrix} q(u_1) & 0 & 0 \\ 0 & q(u_2) & 0 \\ 0 & 0 & q(u_3) \end{pmatrix}.$$

Pero cada  $V_i^\perp$  disminuye en 1 su dimensión con respecto al anterior. Por otro lado,  $V$  tiene dimensión finita  $n$ . Esto prohíbe que el dilema se mantenga indefinidamente. Proseguirá, como mucho, durante  $n$  pasos con  $n = \dim V$ . Así, o bien alguno de los  $V_i^\perp$  está lleno de vectores isotropos, o bien  $V_n^\perp = 0$  y  $\{u_1, \dots, u_n\}$  constituirá la base ortogonal. Se advierte que, en la primera de las dos posibilidades,  $V_i^\perp = \text{Rad } V$  (*¿Por qué?*), lo que proporciona un nuevo método de cálculo del radical.

Merece la pena ilustrar la demostración anterior con un ejemplo. Considérese la forma cuadrática

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_4 - 2x_3^2 + 2x_3x_4$$

definida en el  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial  $\mathbb{R}^4$ . Se pretende encontrar una base ortogonal  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  en este espacio. Tal cual se hizo al comienzo de la sección, a la forma  $q$ , referida a la base canónica  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ , se le asocia la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siguiendo la demostración del [teorema II.1.3](#), se comienza por tomar como  $u_1$  algún vector no isotropo, por ejemplo,  $u_1 = e_2$ , y se calcula el complemento ortogonal de  $V_1 = \langle u_1 \rangle$ . Ello plantea la ecuación vectorial

$$(0, 1, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0,$$

de la que se obtiene la ecuación de  $V_1^\perp$ . En concreto,

$$V_1^\perp \equiv x_1 + x_2 + 2x_4 = 0.$$

Ahora se debe escoger un vector no isótropo  $u_2$  de  $V_1^\perp$ . En rigor, habría que caracterizar a los vectores isótropos de  $V_1^\perp$  mediante una ecuación y elegir  $u_2$  de entre los que no la satisfagan. Pero la práctica sugiere encontrar atajos que suavicen el trabajo. A simple vista se observa que  $e_3$  verifica  $x_1 + x_2 + 2x_4 = 0$  y  $q(e_3) = -2 \neq 0$ . Escríbase pues  $u_2 = e_3$ . Entonces el subespacio  $V_2$  engendrado por  $u_1$  y  $u_2$  queda descrito por las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & + & x_2 & & & 2x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Haciendo a  $x_3 = \lambda$  y  $x_4 = \mu$ , se tiene

$$V_2^\perp = \{(-2\lambda + \mu, 2\lambda - 3\mu, \lambda, \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

El vector  $u_3 = (1, -3, 0, 1)$  pertenece a  $V_2^\perp$  (se ha tomado, por ejemplo,  $\lambda = 0$  y  $\mu = 1$ ), y

$$q(u_3) = (1, -3, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 9 \neq 0.$$

Para finalizar, las coordenadas de los vectores ortogonales a  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$  se ven sujetas a las condiciones

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & + & x_2 & & & 2x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -3x_1 & & & & & & - & 6x_4 & = & 0 \end{array} \right\},$$

de donde surge el cuarto vector  $u_4 = (4, 8, -3, -2)$  que completa la base ortogonal de  $V$ . Pero  $q(u_4) = u_4 A u_4^t = 82$ , luego la matriz  $A$  de  $q$  en la base  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  diagonaliza en

$$q \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 82 \end{pmatrix}.$$

Si el lector se molestase en realizar las operaciones, comprobaría que

$$PAP^t = B,$$

con  $P$  la matriz cuya  $i$ -ésima fila son las coordenadas de  $u_i$  ( $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ).

## §2 Descomposición de Sylvester

Una estrategia que suele dar fruto en álgebra para el estudio de una estructura consiste en “trocearla” en pedazos más pequeños, pero de una mayor “bondad”. A eso se dedicará lo que resta de capítulo ofreciendo descomposiciones de espacios vectoriales provistos de producto interno que brindarán radiografías de su esqueleto.

Antes de proseguir, conviene recordar el concepto de cuerpo ordenado. A un cuerpo  $K$  se le llama *ordenado* si existe en él una relación de orden total compatible con la suma y la multiplicación por elementos mayores que  $0$ , esto es,  $\alpha \leq \beta$  implica  $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$  para cualquier  $\gamma$ , y  $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$  para cada  $\gamma > 0$ . Alternativamente, un cuerpo ordenado es aquél que contiene una clase  $P$  de elementos denominados *positivos* y que satisfacen las propiedades:

- i) Para cada  $\alpha$ , se tiene una y solo una de las tres posibilidades excluyentes:  $\alpha \in P$ ,  $\alpha = 0$ , ó  $-\alpha \in P$ .
- ii) Suma de positivos es positiva.
- iii) Producto de positivos da positivo.

El cuerpo de los reales encarna el prototipo de cuerpo ordenado, y cualquiera de sus subcuerpos hereda el orden. Sin embargo, ni  $\mathbb{C}$  ni ningún cuerpo que posea raíz cuadrada de  $-1$  puede estar ordenado. En efecto, En los cuerpos ordenados, los cuadrados siempre son positivos, luego  $1 = 1^2 > 0$ . Entonces  $-1 < 0$  y se prohíbe la eventualidad  $-1 = \alpha^2$ .

**Teorema II.1.4** (Descomposición de Sylvester <sup>1</sup>) Sea  $q : V \rightarrow K$  una

---

<sup>1</sup> Este resultado, también conocido como ley de la inercia, fue descubierto alrededor de 1850 por C. G. C. Jacobi y J. J. Sylvester, con la diferencia de que el primero desarrollaba una demostración del teorema similar a la actual, mientras que el segundo se conformaba con enunciarlo pues lo consideraba cercano a lo evidente. Por otra parte, Riemann atestigua que Gauss ya lo probaba en los cursos que impartió entre 1846 y 1847, y a los que Riemann asistió como alumno.

forma cuadrática del  $K$ -espacio vectorial  $V$  con  $K$  un cuerpo ordenado. Existen entonces subespacios  $V_+$ ,  $V_0$  y  $V_-$  que satisfacen las siguientes condiciones:

i) El espacio  $V$  descompone en la suma ortogonal-directa

$$V = V_+ \oplus V_0 \oplus V_-.$$

ii) La restricción de  $q$  a  $V_+$  está definida positiva, o sea,  $q(u) > 0$  para cada vector no nulo  $u$  de  $V_+$ .

iii) La restricción de  $q$  a  $V_-$  está definida negativa, o sea,  $q(u) < 0$  para cada vector no nulo  $u$  de  $V_-$ .

iv)  $V_0$  es totalmente isotrópico.

Además, cualquier otra descomposición de  $V$  en la suma ortogonal-directa  $V = W_+ \oplus W_0 \oplus W_-$ , con  $q$  definida positiva en  $W_+$ , definida negativa en  $W_-$  e idénticamente nula en  $W_0$  ha de verificar  $\dim W_+ = \dim V_+$ ,  $\dim W_0 = \dim V_0$  y  $\dim W_- = \dim V_-$ .

**Demostración** Sólo se probará la existencia por proporcionar un método para la descomposición. Por el teorema II.1.3,  $V$  contiene alguna base ortogonal  $\{u_1, \dots, u_n\}$ . Reordenéense los vectores de la base de forma que  $q(u_i) > 0$  para  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $q(u_i) = 0$  para  $i \in \{k+1, \dots, m\}$  y  $q(u_i) < 0$  para  $i \in \{m+1, \dots, n\}$ . Denótese por  $V_+$  al subespacio engendrado por los  $k$  primeros  $u_i$ , por  $V_0$  al engendrado por los  $u_i$  con  $k+1 \leq i \leq m$ , y  $V_-$  al engendrado por los restantes  $u_i$ . Que estos subespacios son ortogonales dos a dos se deduce del carácter ortogonal de la base elegida. Un cálculo directo prueba la satisfacción de las propiedades ii), iii) y iv).

Advierta el lector que el subespacio  $V_0$  de la descomposición de Silvertre coincide con el radical de  $V$ .

## §2 Descomposición de Witt

**Definición II.1.3** Un plano hiperbólico es un espacio vectorial bidimensional provisto de producto interno no degenerado y que contiene al menos un vector isótropo no nulo.

La importancia de los planos hiperbólicos reside, como se verá más adelante, en que realizan una autopsia más fina del espacio que los contiene al rebanarlo en secciones más chicas que el teorema de Sylvester y, además, no precisa de la ordenación del cuerpo.

A continuación se estudiarán las entrañas de un plano hiperbólico  $V$  con forma cuadrática  $q$ . Sea  $u \neq 0$  un vector isótropo. Se afirma que existen otros vectores isótropos no nulos aparte de los proporcionales a  $u$ . A fin de hallarlos, escójase un  $w$  linealmente independiente de  $u$  para formar la base  $\{u, w\}$ . Aquí, la matriz de  $q$  toma el aspecto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & q(u, w) \\ q(u, w) & q(w) \end{pmatrix}.$$

Si  $q(w) = 0$ , ya se habría acabado. Supóngase pues que  $q(w) \neq 0$ . Como  $q$  no degenera, entonces el determinante de  $A$ , cuyo valor es  $-q(u, w)^2$ , no se anula. Esto permite sustituir  $w$  por  $w' = q(u, w)^{-1}w$  y se tiene la nueva matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q(w') \end{pmatrix}.$$

Para buscar algún vector isótropo de coordenadas  $(1, x)$  en la base  $\{u, v'\}$  se plantea la ecuación

$$(1, x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q(v') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 0.$$

que da como soluciones  $x = 0$  (el propio  $u$ ), y  $x = \frac{-2}{q(w')}$ . Por tanto,  $v = u - \frac{2}{q(w')}w'$  es isótropo y linealmente independiente de  $u$ .

**Lema II.1.2** *Para un espacio vectorial  $V$  bidimensional y con forma cuadrática no degenerada sobre  $K$ , son equivalentes:*

i)  $V$  es un plano hiperbólico,

ii) existe un par de vectores  $(u, v)$ , denominado **par hiperbólico**, que definen una base con respecto a la cual el producto interno se representa por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y



iii) hay cierta base en la que  $q$  toma la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Además, todo plano hiperbólico contiene dos rectas totalmente isotrópicas.

**Demostración** La parte i) implica ii) se ha visto más arriba. Ahora supóngase que hay un par hiperbólico  $(u, v)$ . Basta tomar la nueva base integrada por los vectores  $u_1 = \frac{1}{2}(u + v)$  y  $u_2 = \frac{1}{2}(u - v)$  para expresar  $q$  por medio de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por último, si  $q$  tiene a  $A$  por matriz en la base  $\{u_1, u_2\}$ , entonces  $V$  no degenera pues  $|A| = -1$  y, por otro lado, contiene al vector isótropo  $u_1 + u_2 \neq 0$ . En suma:  $V$  es un plano hiperbólico.

Sólo resta por observar que los subespacios unidimensionales (rectas vectoriales) engendrados por  $u$  y por  $v$ , con  $(u, v)$  un par hiperbólico, constituyen subespacios totalmente isotrópicos.

Esta última propiedad es la que relaciona el adjetivo “hiperbólico”, referido a los planos, con las proyectividades hiperbólicas entre rectas. En efecto, sea  $\sigma : \mathcal{P}_1(K) \rightarrow \mathcal{P}_1(K)$  una proyectividad hiperbólica de ecuación general

$$\lambda x x' + \mu x + \nu x' + \zeta = 0.$$

Los dos puntos dobles de  $\sigma$  se obtienen como raíces del polinomio

$$\lambda x^2 + (\mu + \nu)x + \zeta = 0.$$

Pasando a coordenadas homogéneas por medio de  $x = \frac{x_1}{x_0}$ , y multiplicando por  $x_0^2$ , se advierte que los puntos dobles de  $\sigma$  se asocian a vectores isótropos no nulos del espacio vectorial bidimensional  $K^2$  con respecto a la forma cuadrática  $q(x_0, x_1) = \lambda x_1^2 + (\mu + \nu)x_0 x_1 + \zeta x_0^2$ . A  $K^2$  sólo le falta la no degeneración para merecer el grado de plano hiperbólico. Pero esto se deduce del hecho de que la matriz

$$\begin{pmatrix} \zeta & \frac{\mu + \nu}{2} \\ \frac{\mu + \nu}{2} & \lambda \end{pmatrix}$$

de  $q$  posee determinante  $\zeta\lambda - \frac{(\mu+\nu)^2}{4}$ , el cual no puede anularse al coincidir con un múltiplo del discriminante de la ecuación de segundo grado que determina los puntos dobles. Las rectas totalmente isotrópicas mencionadas en el [lema II.1.2](#) se interpretan como la pareja de puntos dobles de la proyectividad. Sobre esta interesante conexión entre proyectividades y formas cuadráticas se volverá en el próximo capítulo.

El [lema II.1.2](#) es susceptible de generalizarse en el siguiente sentido. Supóngase que un espacio vectorial  $V$  con forma cuadrática  $q$  sobre  $K$  se escribe como suma ortogonal directa de  $n$  planos hiperbólicos  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Ha de ocurrir que  $\dim V = 2n$ . Por la parte iii) del [lema II.1.2](#), existe una base en la cual matriz de  $q$  diagonaliza con  $n$  elementos iguales a 1 y otros  $n$  iguales a  $-1$ . Por tanto, su determinante valdrá  $\pm 1$  y la forma  $q$  no degenera. Para cada  $P_i$ , elíjase un par hiperbólico  $\{u_i, v_i\}$ . Sean  $W_1$  el subespacio engendrado por  $u_1, u_2, \dots, u_n$  y  $W_2$  el engendrado por  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Los  $u_i$  son isotropos y ortogonales dos a dos, de ahí que la matriz de  $q$  en la base compuesta por ellos se llene de ceros. Conclusión,  $W_1$  es totalmente isotrópico. Y a  $W_2$  le sucede tres cuartos de lo mismo. Al final queda  $V$  descompuesto en suma directa  $W_1 \oplus W_2$  de subespacios totalmente isotrópicos de la misma dimensión  $n$ . Se avisa de que esta suma no será ortogonal-directa pues ello provocaría la isotropía total del espacio no degenerado  $V$ .

**Lema II.1.3** *Si  $V$  es un espacio vectorial con producto interno no degenerado sobre  $K$ , entonces todos sus subespacios totalmente isotrópicos maximales<sup>2</sup> tienen la misma dimensión. A este invariante se le denomina el índice de Witt. Además, son equivalentes:*

- i)  $V$  se expresa como suma ortogonal-directa de  $n$  planos hiperbólicos,
- ii) existen dos subespacios  $W_1$  y  $W_2$  totalmente isotrópicos maximales y de dimensión  $n$  tales que  $V = W_1 \oplus W_2$ .

La utilidad práctica de los [lemas II.1.2](#) y [II.1.3](#) se verá en el capítulo

---

<sup>2</sup> Aquí se entiende la maximalidad en el sentido obvio de que los subespacios totalmente isotrópicos maximales no están propiamente contenidos en subespacios totalmente isotrópicos.

siguiente. Por ahora, baste con comentar que las descomposiciones a las que se refiere el [lema II.1.3](#) no son únicas. Se da la posibilidad de que el mismo espacio vectorial  $V$  se exprese de distintas formas tanto como suma directa de espacios totalmente isotrópicos maximales como en suma ortogonal-directa de planos hiperbólicos. Lo que sí que permanece es el número de planos por un lado y la dimensión de los sumandos directos totalmente isotrópicos por otro, cifras que, encima, han de coincidir entre sí y con el índice de Witt.

**Teorema II.1.5** (Descomposición de Witt) *Sea  $q : V \rightarrow K$  una forma cuadrática. Entonces  $V$  es la suma ortogonal-directa*

$$(2) \quad \text{Rad } V \oplus \left[ \bigoplus_{i \in S} P_i \right] \oplus W,$$

con cada  $P_i$  un plano hiperbólico y  $W$  un subespacio no isotrópico. Cualquier otra descomposición de  $V$  en suma ortogonal-directa del radical, planos hiperbólicos y subespacio no isotrópico ha de conservar el número de planos y la dimensión de  $W$ <sup>3</sup>.

En la descomposición (2) es habitual no escribir los sumandos nulos. Por ejemplo, en espacios no degenerados, el radical se anula. Por otro lado, si un suplemento del radical resulta no isotrópico, entonces el número de planos hiperbólicos se reduce a 0, en cuyo caso  $\bigoplus_{i \in \emptyset} P_i = 0$ . Por último, puede que se dé en un suplemento del radical alguna de las circunstancias descritas en i) o ii) del [lema II.1.3](#) y  $W = 0$ .

**Demostración** Sea  $S$  un subespacio de  $V$  tal que  $V = \text{Rad } V \oplus S$ . Gracias al apartado ii) del [teorema II.1.1](#), el subespacio  $S$  no degenera. Por tanto, para el resto de la prueba bastará demostrar que cada espacio  $V$  provisto de forma cuadrática no degenerada es suma ortogonal-directa de planos hiperbólicos y subespacio no isotrópico. De nuevo hay un proceso constructivo de demostración que comienza por formularse la siguiente pregunta, ¿hay en  $V$  otros vectores isótropos aparte del 0? Con respuesta negativa se habría

---

<sup>3</sup> El número de planos, o sea, el cardinal del conjunto  $S$  de subíndices, no es sino el índice de Witt.

finalizado:  $V$  descompone en la suma ortogonal-directa del radical con un subespacio no isotrópico. En caso contrario, tómesese un vector  $u_1 \in V - \{0\}$  con  $q(u_1) = 0$ . La no degeneración de  $V$  permite afirmar la existencia de algún  $v_1 \in V$  con  $q(u_1, v_1) \neq 0$ . El subespacio  $P_1$  engendrado por  $u_1$  y  $v_1$  se convierte así en un plano hiperbólico. Piénsese en por qué no debe haber dudas al realizar tal afirmación. A continuación, el **teorema del sumando directo** descompone a  $V$  en la suma ortogonal-directa de  $P_1$  y su complemento ortogonal  $V_1 = P_1^\perp$ . Haciendo uso del **corolario II.1.1**, se tiene

$$\text{Rad } V_1 = V_1 \cap V_1^\perp = P_1^\perp \cap (P_1^\perp)^\perp = P_1^\perp \cap P_1 = \text{Rad } P_1 = 0,$$

luego  $V_1$  no degenera y es factible reiterar en él la disyuntiva original. Si no se encuentran vectores isótropos no nulos en  $V_1$ , se acabaría la demostración:  $V_1$  es el  $W$  del enunciado. De lo contrario, habría en  $V_1$  vectores  $u_2$  y  $v_2$  con  $q(u_2) \neq 0$  y  $q(u_2, v_2) \neq 0$  y aparecería un nuevo plano hiperbólico  $P_2$ , el engendrado por  $u_2$  y  $v_2$ . Ahora se proseguiría razonando en  $V_2 = (P_1 \oplus P_2)^\perp$ , y así sucesivamente. La finito-dimensionalidad de  $V$  concluiría el proceso, bien al llegar a un complemento ortogonal no isótropo de una suma de planos hiperbólicos, o con el agotamiento de  $V$  en suma ortogonal-directa de planos hiperbólicos. La parte de la demostración relativa a la unicidad no se incluye aquí.

Se ilustrará la prueba precedente con un ejemplo. En el espacio vectorial  $\mathbb{Q}^4$  sobre  $\mathbb{Q}$ , considérese la forma cuadrática  $q$  de matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

en la base canónica  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ . El radical de  $V$  se halla como el espacio de las soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & & x_2 & - & x_3 & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right\},$$

planteado a partir de las 4 condiciones  $q((x_1, x_2, x_3, x_4), e_i) = 0$  ( $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ), y que se transforma, por medio de operaciones elementales sobre filas en el sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & + & x_2 & & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & & = & 0 \\ & & & & & x_4 & = & 0 \\ & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Así, haciendo  $x_3 = \lambda$  se obtiene  $\text{Rad } V = \{(-\lambda, \lambda, \lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{Q}\}$ , y  $\text{Rad } V$  es la recta engendrada por el vector  $v = (-1, 1, 1, 0)$ . Un suplemento del radical lo generarán cualesquiera tres vectores linealmente independientes entre sí e independientes de  $v$ . Póngase  $S = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$ . Ahora, los isótropos de  $S$  están sujetos a la condición

$$(0, x, y, z)A \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

luego, aparte del cero, se han de encontrar vectores  $(0, x, y, z) \neq 0$  que satisfagan

$$x^2 + 4xz - y^2 - 4yz + z^2 = 0,$$

por ejemplo, el  $u_1 = (0, 1, 1, 0)$ . Tómese en  $S$  un vector arbitrario no ortogonal a  $u_1$ . El  $e_3$  vale para ello pues  $q(e_3, v_1) = -1$ . Denótese por  $P$  al plano hiperbólico  $\langle u_1, e_3 \rangle$ . Ya no caben más planos hiperbólicos ortogonales a  $P$  dentro de  $S$  pues la dimensión lo impide. Según el [teorema de Witt](#), lo que resta, o sea,  $P^\perp \cap S$  actuará como subespacio no isotrópico. Para determinar el conjunto de los vectores de  $S$  ortogonales a  $P$ , se escribe  $q(u_1, (0, x, y, z)) = q(e_3, (0, x, y, z)) = 0$  y resulta

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & - & y & & = & 0 \\ & & -y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right\},$$

proporcionando el subespacio no isotrópico

$$W = \{(0, -2\lambda, -2\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{Q}\}.$$

En definitiva,  $V$  queda expresado en la forma  $V = \text{Rad } V \oplus P \oplus W$ , con los tres sumandos directos ortogonales dos a dos. El índice de Witt de  $V$ , en este caso, resulta ser 1. Nótese que la descomposición ha dependido de numerosas elecciones. Igual habría surgido otra distinta según el capricho de quien se ocupe de esa labor, pero siempre se obtendría el mismo radical, un único plano hiperbólico y un subespacio no isotrópico unidimensional.

Cuando se trate de una forma cuadrática definida en un espacio vectorial  $V$  sobre un cuerpo ordenado  $K$  en el que todo elemento positivo admita raíz cuadrada, existe una interesante conexión entre el [teorema de Sylvester](#) y el de [Witt](#). Supóngase que se escribe la suma ortogonal-directa  $V = V_+ \oplus V_0 \oplus V_-$ , con  $q$  definida positiva en  $V_+$ , definida negativa en  $V_-$  e idénticamente nula en  $V_0$ . Sean  $\{u_1, \dots, u_k\}$ ,  $\{v_1, \dots, v_m\}$  y  $\{w_1, \dots, w_n\}$  respectivas bases ortogonales de  $V_+$ ,  $V_-$  y  $V_0$ . Entonces  $q(u_i) > 0$  para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , lo cual permite sustituir cada  $u_i$  por  $u'_i = \frac{1}{\sqrt{q(u_i)}}u_i$  de modo que  $q(u'_i) = 1$ . De manera análoga, haciendo  $v'_i = \frac{1}{\sqrt{-q(v_i)}}v_i$  para los  $v_i$  de  $V_-$ , se tiene  $q(v'_i) = -1$  para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Con los  $w_1$  no se precisa realizar ningún malabarismo y se dejan tal cual. En la nueva base, la matriz de  $q$  sólo contiene elementos iguales a 1,  $-1$  ó 0 en la diagonal. Ahora, el subespacio  $P_1 = \langle u'_1, v'_1 \rangle$  es un plano hiperbólico pues la restricción de  $q$  a  $P_1$  se expresa mediante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Y lo mismo sucede con los pares hiperbólicos  $(u'_2, v'_2)$ ,  $(u'_3, v'_3)$ , etcétera. Así, se agotarán los planos hiperbólicos mutuamente ortogonales cuando se nos acaben los  $u'_i$  o los  $v'_i$  en este proceso de emparejamiento. Poniéndose en la situación  $k \leq m$ , los  $v'_i$  que sobran, esto es  $\{v'_{k+1}, \dots, v'_m\}$ , generan un subespacio  $W$  definido negativo y, en particular, no isotrópico. Si  $k > m$ , entonces quedan sin emparejar los vectores  $u'_{m+1}, \dots, u'_k$  que engendrarán un subespacio no isotrópico. En cualquiera de los dos casos, se obtiene la descomposición de Witt con  $n$  la dimensión del radical, el índice de Witt coincidente con el mínimo de  $m$  y  $k$ , mientras que  $|m - k|$  es la dimensión del

subespacio no isotrópico.

La situación anterior resulta notable por contemplar un caso de especial relevancia, el de los productos internos sobre espacios vectoriales reales, donde la descomposición de Sylvester, que sólo precisa de una base ortogonal, proporciona la de Witt ahorrando bastantes cálculos.

Otra circunstancia digna de mención consiste en que en cuerpos algebraicamente cerrados el índice de Witt acaba siempre por alcanzar el máximo valor posible<sup>4</sup>. Para comprobarlo, se verá en primer lugar que todo espacio vectorial bidimensional  $P$  con una forma cuadrática  $q$  no degenerada sobre un cuerpo algebraicamente cerrado  $K$  es un plano hiperbólico. En efecto, escójase cualquier base  $\{u, v\}$  de  $P$ . Si alguno de los dos vectores es isótropo, se ha zanjado el asunto. De lo contrario,  $q$  se representa por una matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

con  $\alpha\gamma - \beta^2 \neq 0$ . Imponer la isotropía de algún vector  $w$  de coordenadas  $(1, x)$  equivale a plantear la ecuación  $\gamma x^2 + 2\beta x + \alpha = 0$ , la cual siempre posee soluciones en  $K$ , a menos que  $\gamma = \beta = 0$  y  $\alpha \neq 0$ , situación que no puede darse en este caso. De ahí que  $V$  se las apañe para contener siempre vectores isótropos no nulos.

Tómese ahora una forma cuadrática arbitraria  $q$  en un  $K$ -espacio vectorial  $V$  (con  $K$  algebraicamente cerrado) y denótese por  $S$  a un suplemento del radical. Si  $\dim S < 2$ , el índice de Witt se anula. En la otra posibilidad, lo ya demostrado asegura la existencia de un plano hiperbólico  $P_1 \subset S$ . De nuevo se formula idéntica pregunta acerca de la dimensión del subespacio no degenerado  $P_1^\perp \cap S$ . Si ésta supera a 2, habrá otro plano hiperbólico  $P_2 \subset P_1^\perp \cap S$ . Así sucesivamente, o bien se agota  $S$  a tijeretazos de planos hiperbólicos si  $\dim S$  es par, o bien sobra un subespacio unidimensional no isotrópico. En definitiva, el índice de Witt coincide con la parte entera de la mitad del rango

---

<sup>4</sup> *Recuérdese que un cuerpo es algebraicamente cerrado si cada polinomio (de grado mayor que cero) con coeficientes en él posee raíces. El prototipo de cuerpo algebraicamente cerrado es  $\mathbb{C}$ , el cuerpo de los números complejos.*

de la forma cuadrática. Por ejemplo, en un espacio complejo de dimensión 5.025 y provisto de una forma cuadrática de rango 1.500, el índice de Witt vale 1.762.

#### §4 Ejercicios

1) Sea  $S$  un subconjunto de un espacio vectorial  $V$  con forma cuadrática  $q$  sobre el cuerpo  $K$ . Si se denota por  $T$  al subespacio engendrado por  $S$ , pruébese que  $S^\perp = T^\perp$ .

2) Desmuéstrese que en la familia de subconjuntos de un espacio vectorial con producto interno, se satisfacen las propiedades

i)  $S \subset T$  implica  $T^\perp \subset S^\perp$ .

ii)  $S \subset (S^\perp)^\perp$ .

iii) Si  $S$  es un subespacio, entonces  $S = (S^\perp)^\perp$  si  $\text{Rad } V = 0$ .

3) Pruébese que cualquier suplemento del radical es no degenerado.

4) Dése un ejemplo de un espacio no isotrópico en el que el radical sea un hiperplano.

5) Pruébese que la congruencia de matrices es una relación de equivalencia.

6) Encuéntrese una base ortogonal en el espacio  $\mathbb{Q}^5$  provisto de la forma cuadrática  $q$  de matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

en la base canónica.

7) Considérese la forma cuadrática

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 + 4x_1x_4 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + 6x_3x_4$$

definida en el espacio vectorial real  $\mathbb{R}^4$ .

i) Descompóngase  $\mathbb{R}^4$  en la suma ortogonal directa a la que se refiere el teorema de Sylvester.



**ii)** Exprésese  $\mathbb{R}^4$  en suma ortogonal directa del radical, planos hiperbólicos y subespacio no isotrópico.

**8)** Constrúyase una forma cuadrática en algún espacio vectorial complejo con rango 7 e índice de Witt 3.

**9)** En este problema se desarrolla otro método para la obtención de bases ortogonales. La idea básica consiste en que una forma cuadrática  $q$  diagonaliza si y solo si actúa sobre las coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  referidas a cierta base, en la forma

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2,$$

lo que sugiere utilizar las técnicas de completación de cuadrados perfectos.

**i)** Sea  $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{ij} \alpha_{ij} x_i x_j$  un polinomio homogéneo de segundo grado en  $n$  variables sobre el cuerpo  $K$ .

**i-1)** Si  $\alpha_{11} \neq 0$ , pruébese que existe una forma cuadrática  $f_1$  en el  $K$ -espacio vectorial  $K^n$  tal que

$$q(x_1, \dots, x_n) = \alpha_{11} f_1(x_1, \dots, x_n)^2 + q_1(x_2, \dots, x_n),$$

con  $q_1$  un polinomio homogéneo de segundo grado en las  $n - 1$  variables  $x_2, \dots, x_n$  con coeficientes en  $K$ . Indicación: complétese a un cuadrado perfecto el conjunto de todos los sumandos que contengan algún  $x_1$ .

**i-2)** Si  $\alpha_{11} = 0$ , pero  $\alpha_{12} \neq 0$ , demuéstrese que alguno de los dos cambios de coordenadas siguientes

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_i = x_i \quad (i > 2) \end{array} \right\} \quad \text{ó} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ y_i = x_i \quad (i > 2) \end{array} \right\}$$

produce  $q(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{ij} \beta_{ij} y_i y_j$ , pero ahora  $\beta_{11} \neq 0$ , encargando el trabajo de la diagonalización al caso **i-1**).

**ii)** Dedúzcase de lo que antecede un procedimiento práctico para la reducción de una forma cuadrática  $q$  a una suma de cuadrados.

iii) En cada uno de los siguientes casos, encuéntrese una base ortogonal para la forma cuadrática correspondiente en espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$  utilizando el procedimiento de la completación de cuadrados<sup>5</sup>.

iii-1)  $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$

iii-2)  $2x_1x_2 - x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$



---

<sup>5</sup> A este proceso de diagonalización también se le conoce como **método de Gauss**.