



I.5

TEOREMAS DE CONFIGURACIÓN

Índice del capítulo.

§1 Homologías, homotecias y traslaciones

§2 El teorema de Pappus

§3 El teorema de Desargues

§4 Ejercicios



TEOREMAS DE CONFIGURACIÓN

En este último capítulo de la primera parte se estudiarán dos teoremas básicos de la geometría proyectiva, los teoremas de Desargues y Pappus. Son numerosas las aplicaciones que de ellos se desprenden, y muy interesantes las conexiones que establecen entre la geometría sintética más clásica, tipo Poncelet, y la más basada en el álgebra, tipo Plücker. Por desgracia, esta aproximación apenas si será esbozada dado el carácter elemental de estas notas. Para una lectura más profunda sobre el particular se remite a [Blumenthal], [Artin] o [Castellón].

§1 Homologías, homotecias y traslaciones

En esta sección se estudiarán las proyectividades de un plano proyectivo en sí mismo¹. Si punto doble era aquél que se transformaba en sí mismo por una proyectividad, a las rectas invariantes por proyectividades se les llamará *rectas dobles* y, en general, a los subespacios invariantes, *subespacios dobles*. En todos los casos se usan también los adjetivos *fijo* y *unido* como sinónimos de doble. Adviértase que los puntos de una recta doble r por una proyectividad σ no tienen por qué ser dobles. Lo más que puede decirse de ellos es que se aplican por σ en otro punto de r . Sin embargo, si un punto P se expresa como intersección $P = r \cap s$ de dos rectas dobles r y s distintas, entonces el propio P ha de ser doble (razónese). Además se da la situación dual, esto es, toda recta determinada por dos puntos dobles es doble. En efecto, si A y B son dobles por σ y $X \in \overline{AB}$, debe ocurrir que $\sigma(X) \in \overline{\sigma(A)\sigma(B)} = \overline{AB}$. En lo que sigue, se hará uso frecuente de estos dos últimos hechos.

De una proyectividad $\sigma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ de un plano en sí mismo se dirá que es *central* si existe un punto $C \in \mathcal{P}$ tal que cada recta por C es doble, esto es, $X \neq C$ implica $\sigma(\overline{CX}) = \overline{CX}$. A un punto C con tal propiedad se le conoce

¹ En realidad, casi todo lo que aquí se afirma también es válido para colineaciones, esto es, para biyecciones que conserven puntos alineados.

como centro de la proyectividad. Basta considerar dos rectas diferentes por el centro para concluir con que el propio centro es un punto doble.

Lema I.5.1 *Para cada proyectividad σ una proyectividad de un plano proyectivo \mathcal{P} en sí mismo se satisfacen las siguientes propiedades:*

i) *Si hay en \mathcal{P} dos rectas distintas llenas de puntos dobles, entonces σ es la identidad.*

ii) *Si C es un centro de σ , entonces C es doble.*

iii) *σ es la identidad si tiene dos centros distintos.*

iv) *Si σ es central con centro C y r es una recta doble que no pasa por C , entonces todo punto de r es doble.*

Demostración Para la parte i), si r y s son dos rectas distintas con todos sus puntos dobles, tómanse A y B en $r - s$ y otros dos puntos C y D en $s - r$. La elección de estos cuatro puntos asegura que no haya tres de ellos alineados, por lo que se ha construido un símplex del plano que queda fijo por la proyectividad σ . El teorema fundamental obliga a que $\sigma = 1_{\mathcal{P}}$. Eso sí, para que este razonamiento funcione es preciso contar con al menos tres puntos en cada recta. Por otro lado, que haya al menos tres puntos en cada recta proyectiva sobre un cuerpo K equivale a afirmar la existencia de al menos dos escalares en el cuerpo K . Pero en cada cuerpo hay al menos dos elementos, el 0 y el 1, lo que acaba de probar i). La demostración del resto del lema se propondrá en la tanda de ejercicios.

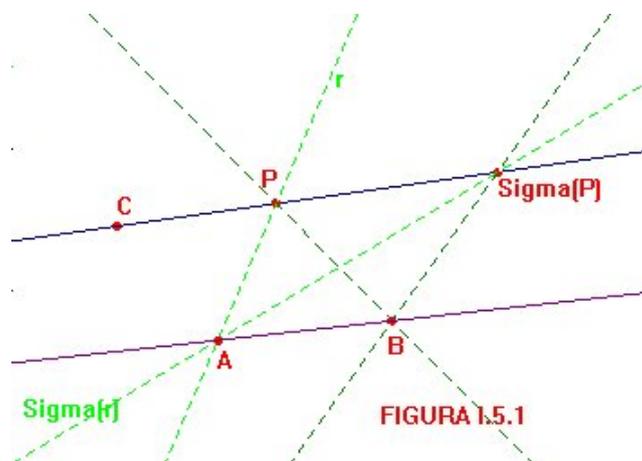
Definición I.5.1 Una *homología* es una proyectividad central de un plano en sí mismo distinta de la identidad.

La parte iii) del lema anterior permite afirmar que para una homología dada existe un único punto tal que toda recta por él es doble. No debería de extrañar que también se satisfaga la propiedad dual, enunciada en el siguiente

Teorema I.5.1 *Toda homología posee una única recta con todos sus puntos dobles.*

Demostración Sea σ una homología del plano \mathcal{P} con centro C . En caso de existir una recta con todos sus puntos dobles, esta ha de ser única por la

parte i) del lema I.5.1, luego solo es preciso comprobar la existencia de tal recta. Como σ no es la identidad, debe haber un punto P con $\sigma(P) \neq P$. En particular, $P \neq C$ pues C es doble, lo que permite considerar la recta doble \overline{CP} . Obsérvese que $\sigma(P) \in \overline{CP}$. Sea r una recta arbitraria por P distinta de la \overline{CP} . Es evidente que $\sigma(r) \neq r$ ya que, de lo contrario, $\sigma(P) = P$. (Recuérdese que el punto de intersección de dos rectas dobles tiene que ser doble.) Se afirma ahora que el punto $A = r \cap \sigma(r)$ es doble (figura I.5.1). En efecto, A no coincide con C (¿por qué?), luego puede escribirse como intersección de r con la recta doble \overline{CA} . Así, $\sigma(A)$ ha de pertenecer a $\sigma(r)$ y a \overline{CA} , cuando el punto común de estas dos rectas es el propio A . De ahí que $\sigma(A) = A$.



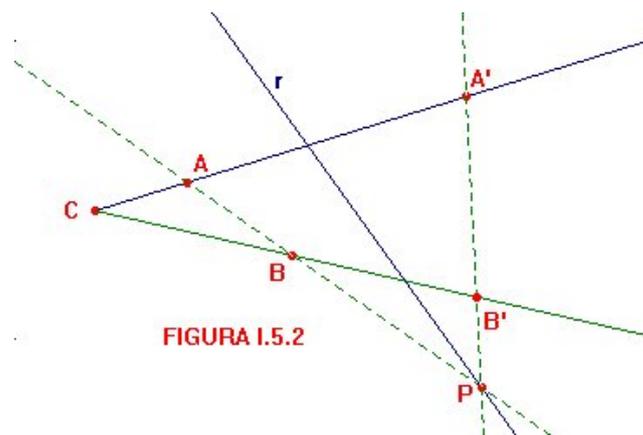
Si en la demostración del lema I.5.1 se concluyó con que en cada recta hay al menos tres puntos, el principio de dualidad proporciona al menos tres rectas pasando por cada punto². Esto permite concebir otra recta s por P distinta de \overline{CP} y de r con la que repetir el razonamiento del párrafo anterior para obtener otro punto doble $B = s \cap \sigma(s)$ distinto de A (¿por qué $B \neq A$?). Como la recta \overline{AB} está determinada por dos puntos dobles, ella misma es doble. Ahora se dan dos posibilidades, o bien $C \in \overline{AB}$, o bien la recta doble \overline{AB} no pasa por el centro. En esta última situación, el lema I.5.1.iv) asegura que \overline{AB} está llena de puntos dobles. Si, por el contrario, $C \in \overline{AB}$, entonces

² Véase también el ejercicio I.3.10.

la restricción de σ de dominio e imagen a la recta \overline{AB} deja fijos a los tres puntos del simplex (A, B, C) . Del teorema fundamental se deduce que esta restricción es la identidad o, lo que es lo mismo, todo punto de \overline{AB} es doble, lo cual concluye la demostración.

A la recta constituida por puntos dobles cuya existencia y unicidad asegura el teorema anterior se la denomina *eje de la homología*.

Es interesante advertir que una homología σ queda determinada por completo sin más que dar su centro C , su eje r y un par de puntos homólogos A y $A' = \sigma(A)$, con A distinto de C y fuera del eje. En tal circunstancia, si se pretende hallar el transformado por σ de otro punto $B \neq C$ no perteneciente a $r \cup \overline{CA}$, se consideraría el punto $P = r \cap \overline{AB}$ (figura I.5.2). Entonces $B' = \sigma(B)$ debe estar, por un lado, sobre la recta \overline{CB} , por ser esta doble, y, por otro, en la transformada de la \overline{AP} que no es otra que $\overline{A'P}$. Luego $B' = \overline{CB} \cap \overline{A'P}$. El caso restante ($B \in \overline{CA}$) se deja como ejercicio.



Ahora se plantea la siguiente pregunta: ¿cuándo podrá restringirse una homología al afín y obtener una afinidad? Al objeto de contestar a la cuestión, hay que tener en cuenta que para restringir la homología $\sigma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ al afín es preciso que la recta del infinito sea doble. Si esa recta es distinta del eje de homología r , con el centro C en el afín, el lema I.5.1 proporcionaría dos rectas diferentes llenas de puntos dobles (r y la impropia), lo que contradice que σ no es la identidad. Esto limita las posibilidades a cuatro, a saber:

- * El centro C está en el afín y el eje r es la recta del infinito.

- * $C \in r$ con r la recta del infinito.
- * C está en el infinito y r no pasa por C .
- * r no es la recta del infinito, pero C es el punto impropio de r .

Las dos últimas posibilidades se estudiarán en los ejercicios. Aquí se tratarán las dos primeras.

Definición I.5.2 Si C es un punto de un plano afín, por *homotecia de centro C* se entiende a una afinidad que, o bien es la identidad, o bien es la restricción de una homología de la envolvente proyectiva que tiene a C por centro, y a la recta del infinito por eje.

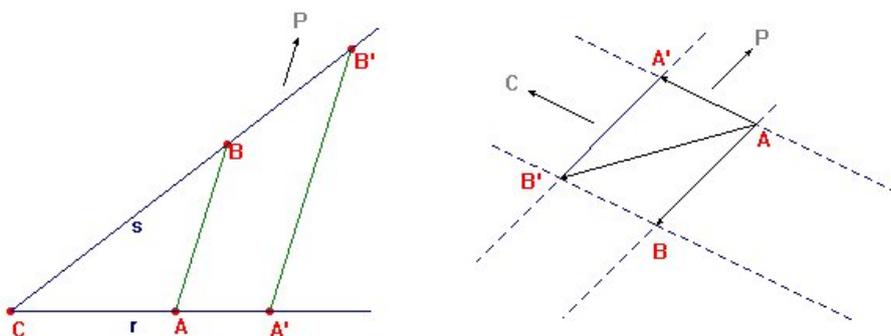


FIGURA I.5.3

En la parte izquierda de la figura I.5.3 se esquematiza el cálculo gráfico de una homotecia h de la que se conoce su centro C y la imagen A' de un punto $A \neq C$. Supóngase que $A \neq A'$. (Piénsese por qué el caso $A = A'$ conduce a que h sea la identidad.) Para hallar el transformado de otro punto $B \notin \overline{AC}$, se procedería inspirándose en el método habitual para homologías. La imagen B' de B ha de estar en la recta \overline{CB} , por ser esta doble, y en la paralela a \overline{AB} por A' , pues aquella ha de pasar (en la envolvente proyectiva) por el punto impropio P de \overline{AB} que es doble. Esto resuelve el trazado de B' cuando $B \notin \overline{AC}$. Si B pertenece a \overline{AC} , tómesese cualquier punto X fuera de esta recta y hállese su imagen X' . El procedimiento anterior permitiría ahora calcular B' con X y X' como datos en lugar de A y A' .

Teorema I.5.2 (Teorema de Thales) *Para cada homotecia σ de centro*

C existe un escalar λ , denominado razón de la homotecia, tal que

$$\sigma(X) - C = \lambda(X - C),$$

cualquiera que sea el punto X del plano afín. Más aún, para cada par de puntos X y Y , se tiene que $\sigma(X) - \sigma(Y) = \lambda(X - Y)$.

Demostración Se evidencia que si la homotecia es la identidad, entonces el teorema se satisface con $\lambda = 1$. De lo contrario, existe al menos un punto A tal que $A \neq \sigma(A) = A' \in \overline{CA}$. Tómese ahora un $B \notin \overline{CA}$ y sea $B' = \sigma(B)$ su imagen. Se está entonces en la situación descrita por la figura I.5.3 izquierda. Que A' pertenezca a \overline{CA} permite escribir $A' - C = \lambda(A - C)$, para algún escalar λ . Por la misma razón, se tiene que $B' - C = \mu(B - C)$, para un cierto μ . Recurriendo al ejercicio I.4.19, se tiene que $\lambda = (QCAA')$ y $\mu = (RCBB')$, con Q el punto del infinito de \overline{CA} , y R , el de \overline{CB} . Pero si se considera, en la envolvente proyectiva, la perspectividad de centro P , con P el punto impropio común a \overline{AB} y $\overline{A'B'}$, resulta que $\lambda = \mu$ pues las perspectividades conservan razones dobles. El caso $X \in \overline{CA}$ se obtendría del ya demostrado adjudicándole, por ejemplo, al punto B anterior el papel que antes jugaba A . Además, para dos puntos cualesquiera X y Y , se tiene

$$\sigma(X) - \sigma(Y) = \lambda(X - C) - \lambda(Y - C) = \lambda(X - Y).$$

con lo que se finaliza la demostración de esta versión un tanto libre del teorema de Thales³.

Se acabará esta sección examinando qué le ocurre a la restricción al afín τ de una homología σ cuyo centro C pertenece a la recta del infinito y esta coincide con el eje. Si el punto del afín A se transforma en el $A' = \tau(A)$, para hallar la imagen $B' = \tau(B)$ de otro punto $B \notin \overline{AA'}$ habrá que operar como se describe a continuación (figura I.5.3 derecha). La paralela a $\overline{AA'}$ por B ha

³ Quizá no se reconozca a primera vista la conocida cantinela del clásico teorema de Thales: Segmentos de paralelas comprendidos entre concurrentes son proporcionales. Pero dicho en la forma equivalente, los triángulos CAB y $CA'B'$ son semejantes, se advierte la coincidencia con el aquí enunciado, en el cual el escalar λ ejerce el papel de razón de semejanza.

de pasar por B' pues el centro de σ es su punto impropio. Además, si P es el punto del infinito de \overline{AB} , entonces B' debe pertenecer a la recta proyectiva $\overline{A'P}$, cuya parte afín es la paralela a \overline{AB} por A' . En definitiva, B' no es sino la intersección de la paralela a $\overline{AA'}$ por B con la paralela a \overline{AB} por A' . Dicho de otro modo, la regla del paralelogramo para la suma de vectores da $B' - A = (B - A) + (A' - A)$, y, despejando B' , se obtiene $B' = B + (A' - A)$. A igual resultado se llegaría bajo la suposición $B \in \overline{AA'}$ sin más que tomar un C fuera de $\overline{AA'}$ y aplicar lo ya probado. Se ha concluido con que la afinidad τ es la traslación de vector $A' - A$.

En resumen, las homologías cuyo eje es la recta impropia se restringen al afín como homotecias o traslaciones según permanezca el centro en el afín o se vaya al infinito, pero téngase presente que el concepto de homología es tan exclusivamente proyectivo, como los de homotecia y traslación lo son de la geometría afín, por más que estas se obtengan como convenientes restricciones de aquellas.

§2 El teorema de Pappus

Aunque se considera a Girard Desargues (1591-1661) como el padre de la geometría proyectiva, uno de los teoremas que más juego ha dado en este campo fue enunciado siglos antes por Pappus de Alejandría, alrededor del año 250 D.C. Y a pesar de que este matemático utilizara para su demostración argumentos esencialmente euclídeos, aquí se está en condiciones de desarrollar una prueba simple que solo utiliza el hecho de que las razones dobles son invariantes por perspectivas.

Teorema I.5.3 (Teorema de Pappus) *En un plano proyectivo, dadas dos ternas (A, B, C) y (P, Q, R) de puntos alineados, los puntos $X = \overline{AQ} \cap \overline{BP}$, $Y = \overline{AR} \cap \overline{CP}$ y $Z = \overline{BR} \cap \overline{CQ}$ están en línea recta.*

Demostración Considérense los puntos $O = \overline{AB} \cap \overline{PQ}$, $Z' = \overline{XY} \cap \overline{BR}$, $S = \overline{PC} \cap \overline{BR}$ y $T = \overline{AR} \cap \overline{BP}$ (figura I.5.4). Nótese que la tesis se

Teorema I.5.4 Sean (A, B, C) una terna de puntos distintos de una recta r de un plano afín y (P, Q, R) otra terna de puntos situados sobre otra recta s del mismo plano secante con la anterior en un punto $O \notin \{A, B, C\}$ y tales que $\overline{AQ} \parallel \overline{BP}$ y $\overline{AR} \parallel \overline{CP}$. Entonces $\overline{BR} \parallel \overline{CQ}$ (figura I.5.5).

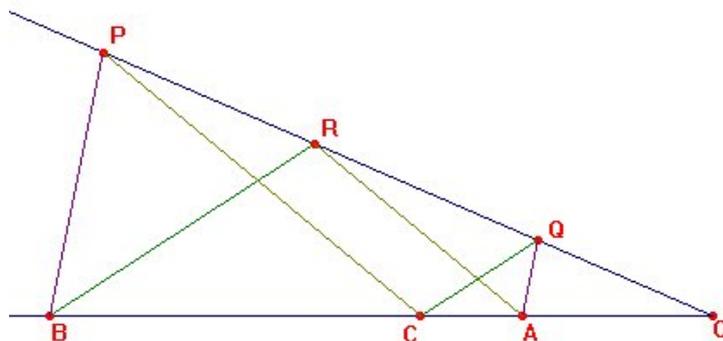


FIGURA I.5.5

Demostración Basta aplicar el teorema de Pappus en la envolvente proyectiva con \overline{XY} como recta del infinito.

Ahora bien, en la configuración de Pappus proyectiva, puede que la recta \overline{XY} pase por el punto O de intersección de \overline{AB} con \overline{PQ} . Estas dos rectas, al pasar al afín eligiendo a \overline{XY} como recta impropia, se convierten en paralelas. Al enunciado resultante se le conoce como

Corolario I.5.1 (Teorema menor de Pappus) Sean A, B y C puntos de una recta r de un plano afín y P, Q y R otros tres puntos situados sobre una recta s del mismo plano paralela a r . Si $\overline{AQ} \parallel \overline{BP}$ y $\overline{AR} \parallel \overline{CP}$, entonces \overline{BR} también es paralela a \overline{CQ} .

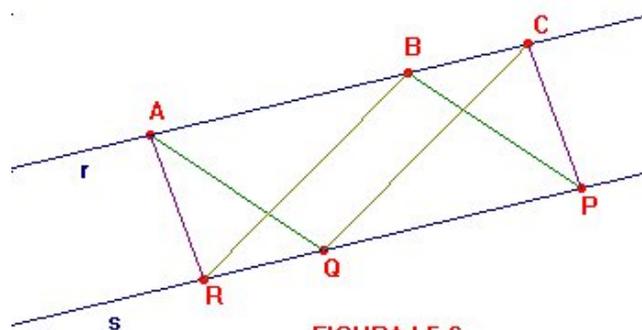


FIGURA I.5.6

Varias aplicaciones del teorema de Pappus serán relatadas más adelante

tanto en el texto como en las sucesivas tandas de ejercicios. Por ahora se expondrá una referente a la conmutatividad de las homologías.

En un plano proyectivo \mathcal{P} elíjanse un punto O y una recta t y considérese el conjunto \mathcal{H} de las homologías de centro O y eje t . Sean σ y τ dos de tales homologías. Tómense dos rectas r y s por O distintas de t y fíjese en r el punto $A \neq O$. Sean $B = \sigma(A)$, $C = \tau(B)$ y ρ la homología de \mathcal{H} que transforma A en C . (Sígase el razonamiento en la figura I.5.7.)

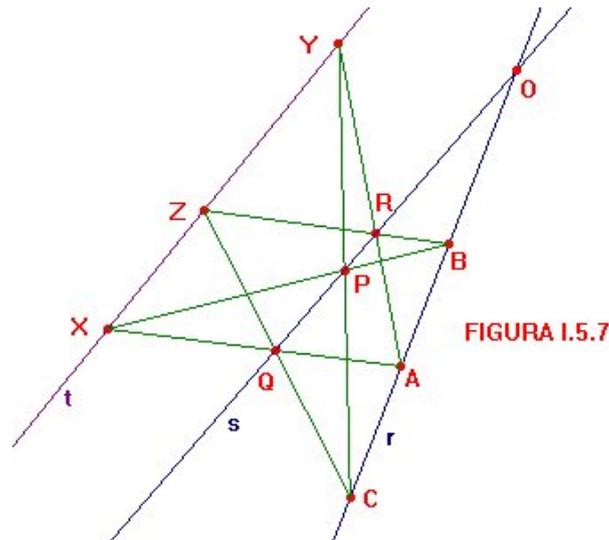


FIGURA I.5.7

Como una homología queda determinada por el centro, el eje y una pareja de puntos homólogos, es evidente que $\rho = \tau \circ \sigma$. Escójase ahora un punto arbitrario $R \in s - \{O\}$. La imagen de R por τ se calcula haciendo $Z = \overline{RB} \cap t$ y $Q = \tau(R) = \overline{CZ} \cap s$. El transformado de Q por σ se obtiene de escribir $X = \overline{AQ} \cap t$ y $P = \tau(Q) = \overline{BX} \cap s$, luego $(\sigma \circ \tau)(R) = P$. En virtud del teorema de Pappus, se tiene que $Y = \overline{AR} \cap \overline{CP} \in t$ es otro punto del eje de homología común. Recuerdese que la homología $\sigma \circ \tau$ queda determinada por la imagen de R con $(\sigma \circ \tau)(R) = P$. Pero $\rho(R) = \overline{CY} \cap s = P$, con lo que $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$. Lo curioso del asunto es que este hecho es revertible, lo cual se enuncia en el siguiente

Teorema I.5.5 *En un plano proyectivo, la satisfacción de la propiedad de Pappus descrita en el teorema I.5.3 equivale a la conmutatividad de cada par de homologías que compartan centro y eje.*

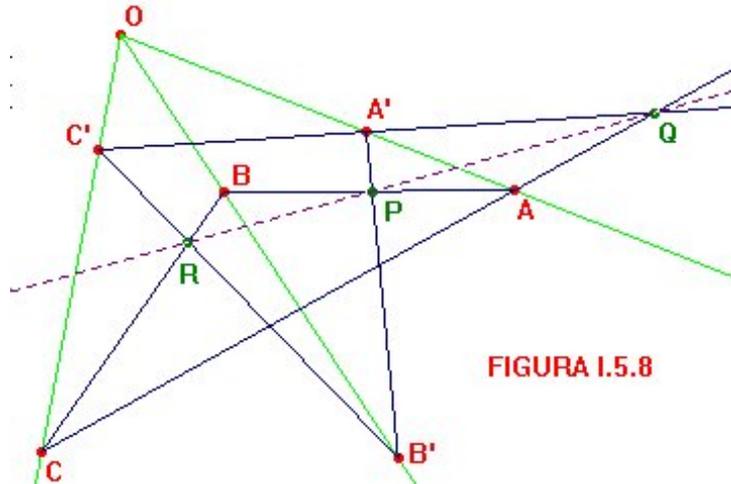
Demostración En un sentido ya se ha probado con anterioridad. Para el otro, sea \mathcal{P} un plano en el que conmutan cada par de homologías con eje y centro comunes. Escójanse en \mathcal{P} dos rectas distintas r y s y seis puntos en la configuración de Pappus con $A, B, C \in r - s$, y $P, Q, R \in s - r$. Se definen los puntos $O = r \cap s$, $X = \overline{AQ} \cap \overline{BP}$, $Y = \overline{AR} \cap \overline{CP}$ y $Z = \overline{BR} \cap \overline{CQ}$. Como en el directo, se razonará sobre las homologías σ , τ y ρ , las tres con eje \overline{YZ} y centro O , tales que $\sigma(A) = B$, $\tau(B) = C$ y $\rho(A) = C$. De nuevo $\rho = \tau \circ \sigma$. Y como τ y σ conmutan, entonces $\rho(R) = \overline{CY} \cap s = P$ debe coincidir con $(\sigma \circ \tau)(R)$. Pero $\tau(R) = \overline{CZ} \cap s = Q$ y $\sigma(Q) = P$, lo que implica que $X = \overline{AQ} \cap \overline{BP}$ es un punto del eje de la homología, con lo que $X \in \overline{YZ}$ y la propiedad de Pappus es satisfecha en \mathcal{P} .

No es fruto del azar que en el enunciado que se acaba de demostrar salga a relucir la palabra conmutatividad en relación con el teorema de Pappus. Y es que, desde el comienzo de estos apuntes y en aras de una mayor simplicidad, se optó por trabajar con espacios (vectoriales, proyectivos y afines) sobre cuerpos. Pero igual se podrían haber considerado unas estructuras solo un poco más generales como los anillos de división⁵. Esta postura, en realidad, no habría acarreado consecuencias demasiado importantes. Por citar algunas de ellas, nos habríamos topado con la imposibilidad de definir sistemas de coordenadas homogéneas mediante la exhibición de la sucesión de puntos base más el punto unidad, surgiría una cierta complicación en el proceso deductivo de las ecuaciones de un subespacio, y habrían de modificarse algunos aspectos de la dualidad. Casi todo lo demás seguiría funcionando en espacios proyectivos sobre anillos de división. Sin embargo, para que en esos planos proyectivos más generales se satisfaga la propiedad de Pappus resulta ser necesario y suficiente que el producto del anillo base sea conmutativo. Esto es relativamente fácil de visualizar a partir de los teoremas I.5.5 y I.5.2, tarea que se dejará que culmine el lector en la tanda de ejercicios.

⁵ *Los anillos de división en alguna bibliografía, son denominados cuerpos no necesariamente conmutativos.*

§3 El teorema de Desargues

Teorema I.5.6 (Teorema de Desargues) Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos de un plano proyectivo tales que las rectas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ concurren en un punto O . Entonces, las parejas de lados $(\overline{AB}, \overline{A'B'})$, $(\overline{AC}, \overline{A'C'})$ y $(\overline{BC}, \overline{B'C'})$, se cortan según puntos que están alineados.



En el enunciado anterior se han omitido, por razones estéticas, aquellas condiciones necesarias para la existencia de los elementos que en él se mencionan. Por ejemplo, para que la recta \overline{AC} tenga derecho a existir, se debería haber exigido que los puntos A y C fuesen distintos.

Demostración: Sean $P = \overline{AB} \cap \overline{A'B'}$, $Q = \overline{AC} \cap \overline{A'C'}$ y $R = \overline{BC} \cap \overline{B'C'}$ (figura I.5.8). Se considerará la homología σ de centro O y eje \overline{PQ} que transforma A en A' . Un cálculo directo da

$$\sigma(B) = \overline{A'P} \cap \overline{OB} = B' \quad \text{y} \quad \sigma(C) = \overline{A'Q} \cap \overline{OC} = C'.$$

Entonces la recta \overline{BC} se transforma por σ en la $\overline{B'C'}$. Como R es doble, pues pertenece al eje de la homología), resulta $R = \overline{BC} \cap \overline{B'C'}$, lo que acaba la demostración⁶.

A dos triángulos de un plano en la configuración de Desargues se les llama, por razones obvias, *homólogos*.

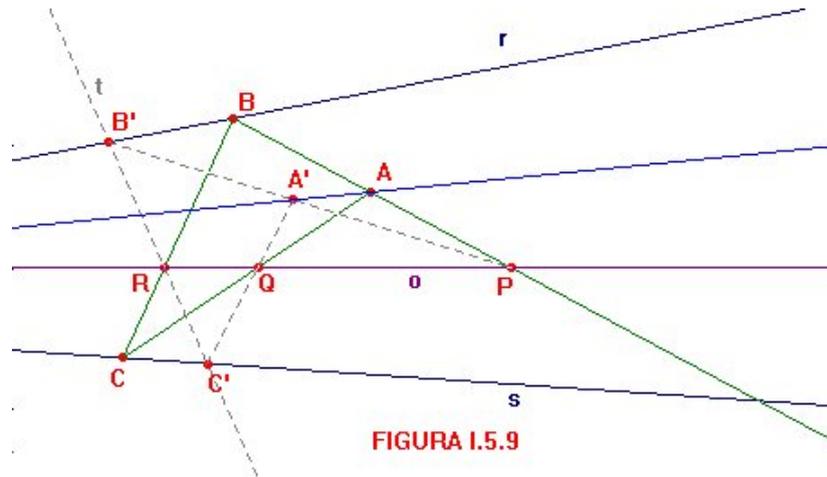
⁶ El argumento original de Desargues pasaba por aplicar el teorema de Menelao y su recíproco a convenientes triángulos.

A continuación se enunciará el dual del teorema de Desargues. La situación dual de dos triángulos (A, B, C) y (A', B', C') dados por sus vértices y con las parejas (A, A') , (B, B') y (C, C') de lados homónimos determinando rectas concurrentes en O , será la de dos triángulos (a, b, c) y (a', b', c') dados por sus lados con las parejas de rectas homónimas (a, a') , (b, b') y (c, c') cortándose según puntos de una recta o . Sean $P = a \cap a'$, $Q = b \cap b'$ y $R = c \cap c'$ alineados sobre la recta o . Hágase $A = b \cap c$, $B = a \cap c$, $C = a \cap b$, $A' = b' \cap c'$, $B' = a' \cap c'$ y $C' = a' \cap b'$. Obsérvese que, con tal terminología, se tiene $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, $\overline{A'B'} = c'$, $\overline{A'C'} = b'$ y $\overline{B'C'} = a'$. Se ha obrado, a fin de cuentas, como suele hacerse con los triángulos, llamando a cada vértice con la misma letra que su lado opuesto, pero en mayúscula. De aquí $P = \overline{AB} \cap \overline{A'B'}$, $Q = \overline{AC} \cap \overline{A'C'}$, $R = \overline{BC} \cap \overline{B'C'}$, y las hipótesis del dual coinciden con la tesis de Desargues. Qué curioso, ¿verdad?

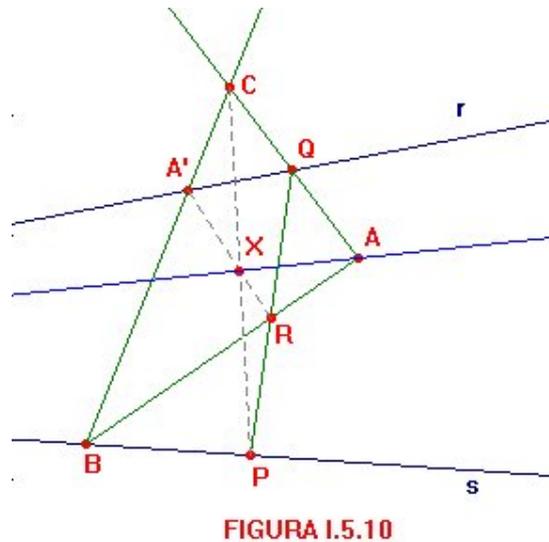
El dual afirmará ahora que las rectas $p = \overline{(a \cap b)(a' \cap b')} = \overline{CC'}$, $q = \overline{(a \cap c)(a' \cap c')} = \overline{BB'}$ y $r = \overline{(b \cap c)(b' \cap c')} = \overline{AA'}$, pasan todas por un punto O . Vaya, se ha topado uno con las hipótesis de Desargues. En definitiva el dual de Desargues dice lo mismo que el recíproco y puede enunciarse entonces la siguiente verdad:

Sean (A, B, C) y (A', B', C') dos triángulos de un plano proyectivo. Entonces, las rectas que pasan por vértices homónimos concurren en un punto si y solamente si las parejas de lados homónimos se cortan según puntos que están alineados.

Una aplicación práctica del recíproco del teorema de Desargues permite trazar por un punto A una recta concurrente con otras dos r y s que se cortan en un lugar O , inaccesible por alguna razón, por ejemplo, porque caiga fuera del papel.



Tómense puntos cualesquiera B en r y C en s (figura I.5.9). La idea consiste en construir un triángulo (A', B', C') homólogo del (A, B, C) con $B' \in r$ y $C' \in s$. Si se consiguiera, la recta $\overline{AA'}$ sería la línea buscada. Para ello, elíjase una recta cualquiera o que corte a los tres lados del triángulo dentro de la figura y que hará las veces de eje de homología. Hágase $P = o \cap \overline{AB}$, $Q = o \cap \overline{AC}$ y $R = o \cap \overline{BC}$. Trácese por R cualquier recta t y llámese B' a la intersección de t con r , y C' a la de t con s . Se precisa hallar A' . Por un lado, ha de caer en $\overline{QC'}$, y, por otro, en $\overline{PB'}$. Así, $A' = \overline{QC'} \cap \overline{PB'}$ y la recta $\overline{AA'}$ soluciona el problema.



Aunque también se podría haber utilizado la propiedad de Pappus. Para

verlo, escójanse puntos arbitrarios A' y Q en r , y P y B en s . Sean $C = \overline{A'B} \cap \overline{QA}$ y $R = \overline{PQ} \cap \overline{AB}$ (figura I.5.10). Entonces, las ternas (A', B, C) y (P, Q, R) se encuentran en la configuración de Pappus con $A = \overline{BR} \cap \overline{CQ}$. Haciendo $X = \overline{AR} \cap \overline{CP}$, la recta \overline{AX} habrá de pasar por $r \cap s = \overline{A'Q} \cap \overline{BP}$.

El teorema de Desargues produce varias versiones afines dependiendo de la cantidad de sus elementos que sean arrebatados por la recta del infinito. Se compendian todas ellas en el siguiente

Teorema I.5.7 Sean (A, B, C) y (A', B', C') dos ternas de puntos de un plano afín tales que, o bien $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ se cortan en un punto O , o bien las tres rectas son paralelas entre sí.

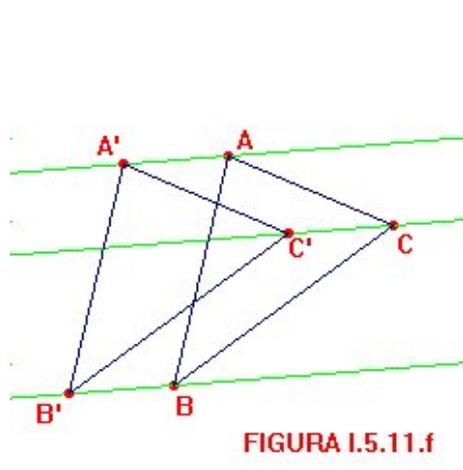
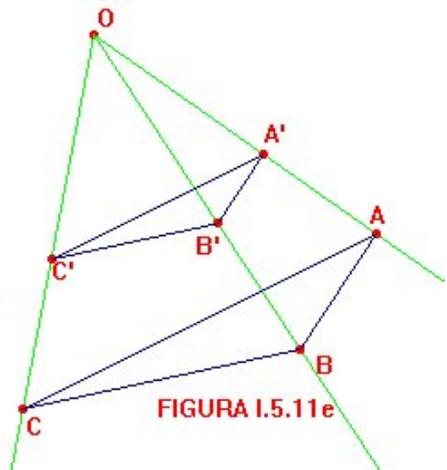
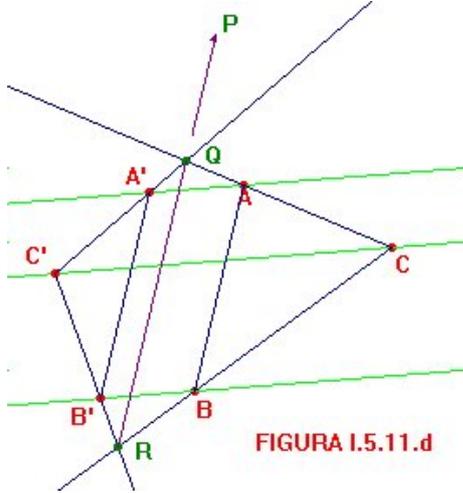
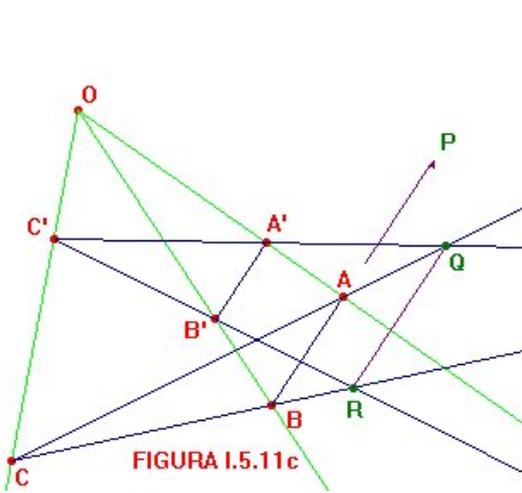
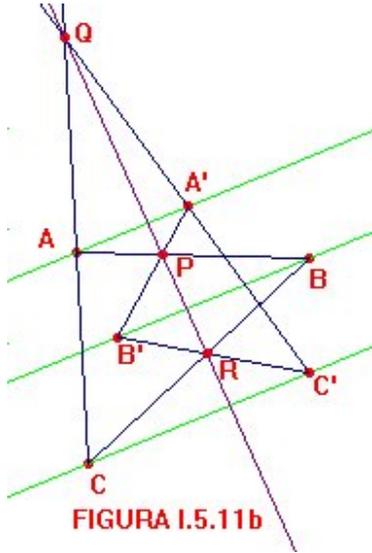
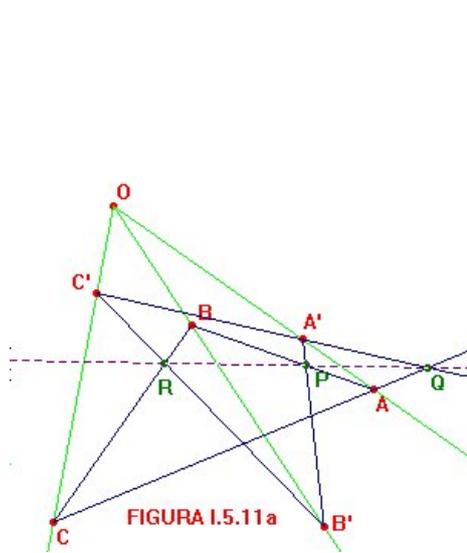
- i) Si $P = \overline{AB} \cap \overline{A'B'}$, $Q = \overline{AC} \cap \overline{A'C'}$ y $R = \overline{BC} \cap \overline{B'C'}$, entonces $R \in \overline{PQ}$ (figuras I.5.11a y I.5.11b).
- ii) Si $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $Q = \overline{AC} \cap \overline{A'C'}$ y $R = \overline{BC} \cap \overline{B'C'}$, entonces \overline{QR} también es paralela a \overline{AB} y a $\overline{A'B'}$ (figuras I.5.11c y I.5.11d).
- iii) Si $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ y $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$, entonces \overline{BC} es paralela a $\overline{B'C'}$ (figuras I.5.11e y I.5.11f).

Recíprocamente, si (A, B, C) y (A', B', C') son dos ternas de puntos de un plano afín satisfaciendo cualesquiera de las circunstancias i), ii) o iii), entonces o bien $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ se cortan en un punto O , o bien las tres rectas son paralelas entre sí.

La demostración se reduce a aplicar el teorema de Desargues o su recíproco en el plano proyectivo en el que se sumerge el afín y examinar las distintas posibilidades para la recta impropia según contenga o no al centro de homología y a los puntos P , Q y R del eje de homología.

Del teorema de Desargues se obtienen multitud de propiedades acerca de polígonos. A continuación se expondrán algunas de ellas, dejando otras para el lector en la sección de ejercicios.

Supóngase que se dispone de un trapecio (A, A', B', B) en un plano afín con $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ y se traza una pareja de paralelas por A y A' y otra por B' y B que producen las intersecciones C' y C con las primeras (figura I.5.12).



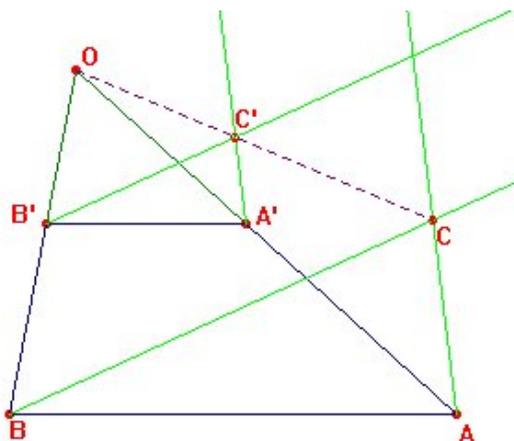


FIGURA I.5.12

Se afirma que la recta $\overline{CC'}$ pasa por la intersección O de los lados $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$. En efecto, los triángulos (A, B, C) y (A', B', C') poseen lados paralelos dos a dos, encontrándose la situación recíproca de iii) del teorema I.5.7.

Teorema I.5.8 Dado un cuadrivértice (A, B, C, D) de un plano proyectivo con puntos diagonales $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$, $F = \overline{AC} \cap \overline{BD}$ y $G = \overline{AD} \cap \overline{BC}$, sea M la intersección de la diagonal \overline{EF} con el lado \overline{AD} . Entonces G pertenece a la recta determinada por P y Q , donde $P = \overline{AB} \cap \overline{CM}$ y $Q = \overline{CD} \cap \overline{BM}$.

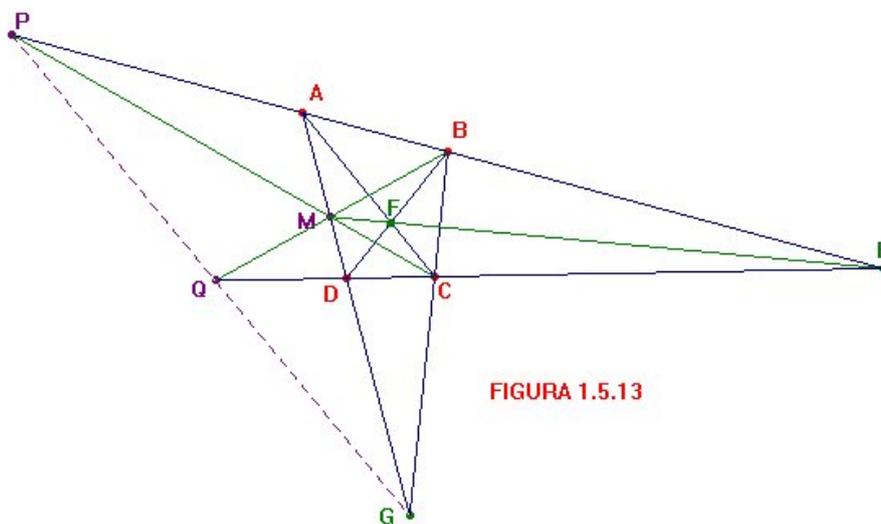


FIGURA I.5.13

Demostración Basta observar que los triángulos (A, E, D) y (C, M, B) son homólogos con el punto F como centro de homología. Según el teorema de Desargues, los puntos P , Q y G se alinean sobre el eje de homología.

Teorema I.5.9 En un plano afín, las medianas de un triángulo con-

curren en un punto de la envolvente proyectiva denominado el baricentro. Además, en característica distinta de 3, el baricentro reside en el afín.

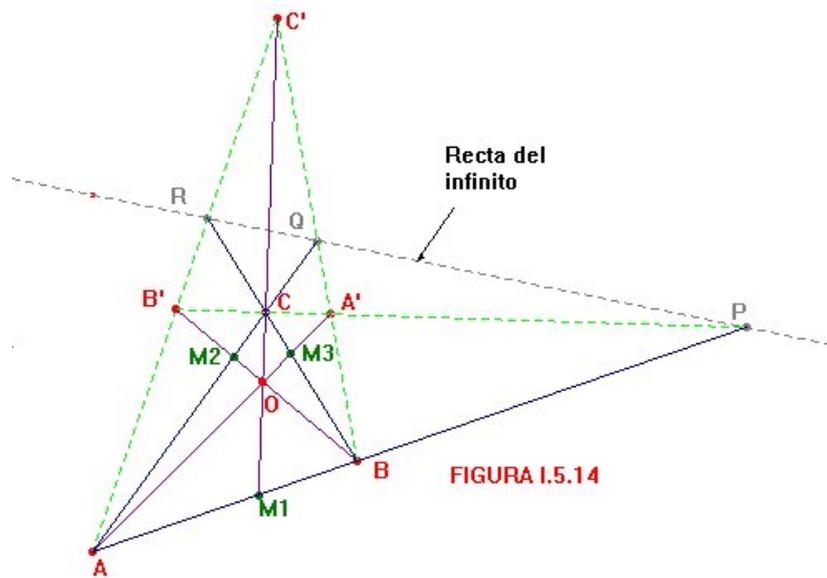


FIGURA I.5.14

Demostración Este teorema puede demostrarse utilizando coordenadas, lo que reduce la prueba a examinar sistemas de ecuaciones lineales. Tal táctica será propuesta al lector en los ejercicios. Sin embargo, aquí se obtendrá como consecuencia inmediata del teorema de Desargues. Sea (A, B, C) un triángulo de un plano afín sobre el cuerpo K . Se trabajará en la envolvente proyectiva del plano afín. Al punto del infinito del lado \overline{AB} se le denotará por P , al del lado \overline{AC} , por Q , y al del lado \overline{BC} , por R . El cuadrivértice (A, B, R, Q) tiene a A y B entre sus vértices, y sus puntos diagonales son C , P y $C' = \overline{BQ} \cap \overline{AR}$ (figura I.5.14). El cuarto armónico de la terna (A, B, P) será entonces $M_1 = \overline{AB} \cap \overline{CC'}$. Recordando el lema I.4.2 y teniendo en cuenta que $-1 = (ABPM_1) = (PM_1AB)$ resulta que M_1 es el punto medio del lado \overline{AB} . De forma análoga se encontrarían los puntos medios de los otros dos lados, el M_2 considerando el cuadrivértice (A, C, R, P) (con $B' = \overline{AR} \cap \overline{CP}$ y $M_2 = \overline{AC} \cap \overline{BB'}$), mientras que el punto M_3 se obtiene del cuadrivértice (B, C, P, Q) (con $A' = \overline{BQ} \cap \overline{CP}$ y $M_3 = \overline{BC} \cap \overline{AA'}$). Nótese que las medianas son las rectas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$. Pero ahora los triángulos

(A, B, C) y (A', B', C') están en la configuración del recíproco de Desargues pues las parejas de lados homónimos se cortan según los puntos alineados P , Q y R . De ahí que las medianas hayan de concurrir en el punto O , que será el baricentro.

Para la segunda parte, supóngase que el baricentro O reside en el infinito⁷. El cuadrivértice $\{B, C, P, Q\}$, del que R es punto diagonal, proporciona la cuaterna armónica (B, C, R, M_3) . También se ha probado que $(ABPM_1) = -1$. Pero la perspectividad de centro O transforma esta última cuaterna armónica en la (M_3, B, R, C) . Para ello, téngase en cuenta que $\overline{OP} \cap \overline{BC}$ debe ser el punto impropio de \overline{BC} , esto es, R . En definitiva, tanto (B, C, R, M_3) como (M_3, B, R, C) forman cuaternas armónicas. Del teorema I.4.4 se desprende que $-1 = 1 - \frac{1}{-1}$, lo que implica que la característica de K es 3. (Recuérdese aquí el ejercicio I.4.20.)

§4 Ejercicios

1) Complétese la demostración del lema I.5.1.

2) Pruébese que si σ es una proyectividad de un plano distinta de la identidad y con toda una recta r de puntos dobles, entonces σ es una homología. Indicación: realícese el razonamiento dual al expuesto en la demostración del teorema I.5.1.

3) Demuéstrese que una homología de un plano no tiene más puntos dobles que el centro y el eje, ni más rectas dobles que el eje y las que pasan por el centro.

4) Sea $\sigma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ una proyectividad con $\dim \mathcal{P} \geq 2$. Demuéstrese que si hay en \mathcal{P} dos hiperplanos distintos \mathcal{H} y \mathcal{H}' compuestos por puntos dobles, entonces $\sigma = 1_{\mathcal{P}}$.

5) Las definiciones de proyectividad central y homología pueden extenderse a espacios proyectivos de dimensión $n \geq 2$ de forma obvia: de una

⁷ A la situación en que dos triángulos son homólogos con respecto a una homología cuyo eje pasa por el centro se la conoce como la configuración menor de Desargues .

proyectividad $\sigma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ se diría que es *central* si existe un $C \in \mathcal{P}$ tal que cada hiperplano \mathcal{H} que contenga a C es doble ($\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$). A la proyectividad central σ se la llamará *homología* cuando $\sigma \neq 1_{\mathcal{P}}$. Pues bien, si $\sigma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ es una homología con $\dim \mathcal{P} \geq 2$, pruébense las siguientes propiedades:

- i) Cada recta por el centro es doble.
- ii) El centro C de σ es único.
- iii) Cada hiperplano doble que no pasa por C está lleno de puntos dobles.
- iv) Existe un único hiperplano compuesto por puntos dobles (esta es la generalización del teorema I.5.1).

6) En un plano proyectivo \mathcal{P} , sea σ una homología de centro C y eje r . En este ejercicio se estudiarán las restricciones de σ a un plano afín $\mathcal{A} = \mathcal{P} - s$, con s una recta distinta del eje. En tales circunstancias, ya se vio que C ha de quedarse en el infinito. Llámese τ a la restricción de σ al afín.

- i) Demuéstrese que el conjunto

$$\{\overline{P\tau(P)} : P \neq \tau(P), P \in \mathcal{A}\}$$

constituye un haz de rectas paralelas.

- ii) Si $C \notin r$, pruébese que τ opera en cada recta $\overline{A\tau(A)}$ como una homotecia, esto es, existe un escalar λ tal que $\tau(A) - P = \lambda(A - P)$ para cada punto A fuera del eje, con $P = \overline{A\tau(A)} \cap r$ ⁸. Indicación: puede facilitar bastante el trabajo usar el ejercicio I.4.19 y el hecho de que la razón doble es invariante por perspectivas.
- iii) Si $C \in r$, compruébese que τ restringida a cada recta paralela al eje es una traslación⁹.
- iv) Dense métodos gráficos para el cálculo de dilataciones y transvecciones conocidos el eje r y un par de puntos homólogos (A, A') , con $A \notin r$.

7) Enúnciese el dual del teorema de Pappus¹⁰. Si es posible, hágase lo propio con el teorema menor de Pappus.

⁸ En tal situación, se dice de τ que es una dilatación de razón λ .

⁹ A τ se la llama entonces una transvección.

¹⁰ En cierta literatura lo llaman el teorema de Brianchon

8) Compruébese que en un plano afín la composición de dos homotecias del mismo centro C y razones respectivas λ y μ es otra homotecia de centro C y razón $\lambda\mu$. Utilícese este hecho y el teorema I.5.5 para dar una demostración alternativa del teorema de Pappus.

9) Sean $r, s, t, a, b, c, a', b', c'$ nueve rectas distintas de un plano proyectivo tales que $a \cap a' \in s, b \cap b' \in s, c \cap c' \in s, c \cap b' \in r, a \cap c' \in r, b \cap a' \in r, b' \cap a \in t$ y $a' \cap c \in t$. Demuéstrese que $c' \cap b \in t$.

10) El teorema de Desargues ha sido comprobado en espacios proyectivos bidimensionales. Examínese la prueba para eliminar de ella las restricciones sobre la dimensión. Dicho de otra forma, pruébese que dos triángulos homólogos y no coplanarios de un espacio proyectivo de dimensión mayor o igual que 2 son tales que sus lados homólogos, además de cortarse, lo cual no resulta automático en estas dimensiones, lo hacen según puntos de la misma recta.

11) Sean (A, B, C, D) y (A', B', C', D') dos tetraedros dados por sus vértices de un espacio proyectivo tridimensional tales que las rectas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$ pasan todas por un punto O distinto de los ocho primeros.

- i)** Pruébese que las parejas de caras homólogas se cortan según rectas coplanarias. El término homólogo se entiende en sentido obvio, por ejemplo, la cara $A' + B' + C'$ es la homóloga de la cara $A + B + C$. La anterior es una analogía tridimensional del teorema de Desargues.
- ii)** Demuéstrese el recíproco, esto es, si dos tetraedros de un espacio tridimensional satisfacen que sus parejas de caras homólogas se cortan según tres rectas del mismo plano, entonces las rectas determinadas por parejas de vértices homólogos concurren en un punto.
- iii)** Enúnciese alguna otra analogía en dimensión cuatro.

12) Demuéstrese que si en un plano proyectivo el triángulo (A, B, C) es homólogo con el (A', B', C') y con el (B', C', A') , entonces también lo es con el (C', A', B') .

13) Obténgase el recíproco de la propiedad de Pappus aplicando el di-

recto a convenientes ternas de puntos. Con mayor concreción, en un plano proyectivo sean A, B y C tres puntos de una recta, y P, Q y R otros tres puntos arbitrarios. Considérense los puntos $X = \overline{AQ} \cap \overline{BP}$, $Y = \overline{BR} \cap \overline{CQ}$ y $Z = \overline{AR} \cap \overline{CP}$. Pruébese que si X, Y y Z están alineados, entonces el punto R ha de pertenecer a la recta \overline{PQ} .

14) Si tres triángulos de un plano son homólogos dos a dos respecto a mismo centro de homología, compruébese que los ejes de homología concurren en un punto.

* **15)** En un plano afín considérese un cuadrivértice (A, B, C, D) . Sean P la intersección de \overline{AD} con la paralela a \overline{CD} por B , y Q , el punto de corte de \overline{BC} con la paralela a \overline{AB} por D . Utilícese el teorema de Pappus para demostrar que \overline{PQ} y \overline{AC} son rectas paralelas¹¹.

16) Sean A, B, C, D cuatro puntos y a, b, c, d cuatro rectas de un plano tales que $b \cap c \in \overline{AD}$, $c \cap a \in \overline{BD}$, $a \cap b \in \overline{CD}$, $a \cap d \in \overline{BC}$ y $b \cap d \in \overline{AC}$. Pruébese que $c \cap d \in \overline{AB}$.

17) Resuélvase el ejercicio I.3.5 utilizando tan solo el teorema de Desargues.

18) Dado un pentágono (A, B, C, D, E) de un plano, sean $F = \overline{AB} \cap \overline{CD}$ y $M = \overline{AD} \cap \overline{EF}$. Demuéstrese que los puntos $P = \overline{AE} \cap \overline{BM}$, $Q = \overline{DE} \cap \overline{CM}$ y $R = \overline{BC} \cap \overline{AD}$ están alineados.

19) En un plano afín supóngase que tanto (A, B, C, D) como (A, B', C, D') son paralelogramos. Pruébese que (B, B', D, D') es otro paralelogramo.

20) Obténgase una demostración analítica (es decir, que haga uso de las coordenadas homogéneas) del teorema I.5.9. Indicación: Si A, B y C son los vértices de un triángulo (no degenerado, claro), P es el punto del infinito de \overline{AB} , y Q , el de \overline{AC} , tómesese un sistema de coordenadas homogéneas del tipo $\{A, P, Q; U\}$, para cualquier U que haga las veces de punto unidad. En él, A tiene coordenadas $(1, 0, 0)$, mientras que las de B son $(1, \beta, 0)$, y $(1, 0, \gamma)$ las de C .

¹¹ A este hecho se le conoce como propiedad especial de Pappus.

21) En un plano afín sobre un cuerpo de característica 3 se considera el cuadrivértice $\{A, B, C, D\}$ de puntos diagonales $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$, $F = \overline{AC} \cap \overline{BD}$ y $G = \overline{AD} \cap \overline{BC}$. Sea H la intersección de la diagonal \overline{FG} con el lado \overline{CD} . Demuéstrese que las rectas \overline{AH} , \overline{EF} y \overline{BC} concurren. Inténtese una argumentación sintética que utilice el ejercicio I.4.20. Si no se consigue, se permite al lector recurrir a coordenadas.

22) Pruébese el recíproco de la segunda parte del teorema I.5.9, es decir, que en característica 3, las medianas de un triángulo son rectas paralelas. De nuevo debería acometerse un razonamiento sintético apoyado en el ejercicio anterior, y solo acabar usando coordenadas en caso de desesperación.

